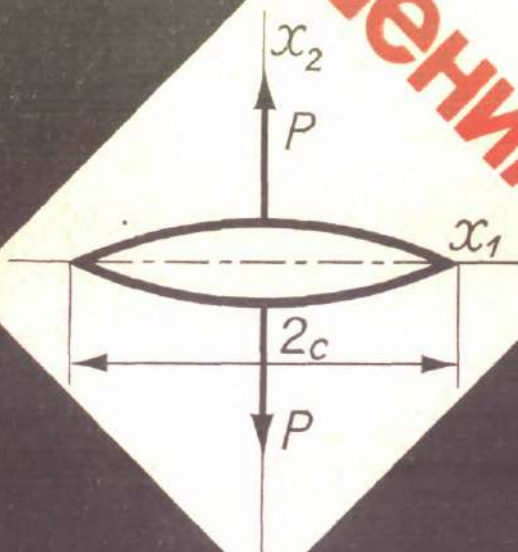


Ю.Н. Работнов

Введение в механику разрушения



Ю. Н. РАБОТНОВ

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ РАЗРУШЕНИЯ



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1987

ББК 22.25

P13

УДК 539.3

Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 80 с.

С использованием простых моделей изложены основные идеи, положенные в основу описания различных процессов разрушения твердых тел. Рассмотрены основы линейной механики разрушения, вязкое разрушение при повышенных температурах, идея введения кинетических уравнений для описания явлений ползучести и длительной прочности, методы описания нелинейной наследственности. Уделено внимание некоторым современным проблемам разрушения композитных материалов.

Для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов, интересующихся проблемами прочности твердых тел.

Ил. 52. Библиогр. 22 назв.

Юрий Николаевич Работнов

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ РАЗРУШЕНИЯ

Редактор И. М. Бокова

Художественный редактор Т. Н. Кольченко

Технический редактор Л. В. Лихачева.

Корректор Л. С. Сомова

ИБ № 32463

Сдано в набор 10.06.86. Подписано к печати 24.11.86. Т-19700. Формат 84×108^{1/2}. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр.-отт. 4,41. Уч.-изд. л. 4,25. Тираж 7500 экз. Заказ № 2649. Цена 40 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

113054 Москва М-54, Валовая, 28

Отпечатано с привозного набора во 2-й типографии изд-ва «Наука» 121099, Шубинский пер., 6. Зак 3255

P 1703040000—020
053 (02)—87 77-87

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы. 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Основные понятия	9
§ 1. Твердое тело	9
§ 2. Уравнения состояния	10
§ 3. Ползучесть, усталость, пластичность	12
§ 4. Разрушение вследствие геометрических изменений	14
Глава 2. Механика распространения трещин	15
§ 5. Теория Гриффитса	15
§ 6. Антиплоская деформация	16
§ 7. Работа продвижения трещины	18
§ 8. Плоская деформация	19
§ 9. Модель Панасюка—Леонова—Дагдейла	22
§ 10. Интеграл Райса — Черепанова	23
§ 11. Выводы главы 2	26
Глава 3. Ползучесть и разрушение металлов при высоких температурах	28
§ 12. Ползучесть металлов при высоких температурах	28
§ 13. Разрушение при растяжении	30
§ 14. Сложное напряженное состояние	34
§ 15. Техническая теория. Изохронные кривые ползучести	36
§ 16. Разрушение при кратковременной ползучести	39
§ 17. Концентрация напряжений	41
Глава 4. Линейная и нелинейная наследственность	44
§ 18. Наследственная упругость. Линейная теория	44
§ 19. Задача о росте трещины	46
§ 20. Нелинейная наследственность	48
Глава 5. Механика композитных материалов	52
§ 21. Композиты волокнистого строения	52
§ 22. Слоистые упругие композиты	53

§ 23. Предельное состояние пластической композитной структуры	57
§ 24. Прочность слоистых композитов	60
§ 25. Концентрация напряжений в композитах	63
§ 26. Прочность композитных материалов	65
Заключение	68
Список литературы	70
Список основных научных трудов Ю. Н. Работнова	72

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей небольшая книга — одна из последних работ выдающегося советского ученого-механика академика Юрия Николаевича Работнова (1914—1985). С именем Ю. Н. Работнова связаны основополагающие оригинальные исследования во многих областях современной механики деформируемого твердого тела. Ему принадлежат принципиальные результаты в теории оболочек, теории пластичности и устойчивости неупругих систем. Ю. Н. Работнов признан во всем мире как один из создателей современной теории ползучести металлов, наследственной теории упругости, расчетный аппарат которых нашел широкое применение при проектировании и оценке надежности конструкций. Он удивительно тонко понимал тенденцию развития науки и умел очень точно выделить наиболее перспективные направления. Последние годы жизни Юрий Николаевич активно работал в новых направлениях механики разрушения и механики композитных материалов.

Ю. Н. Работнов был не только крупнейшим ученым, но и чутким педагогом, блестящим лектором, воспитавшим в стенах Московского университета целую плеяду учеников. Его перу принадлежат около 200 научных работ, среди которых особое место занимают фундаментальные монографии «Ползучесть элементов конструкций» (М.: Наука, 1966) и «Элементы наследственной механики твердых тел» (М.: Наука, 1977), учебники «Сопrotивление материалов» (М.: Физматгиз, 1962) и «Механика деформируемого твердого тела» (М.: Наука, 1979), которые стали настольными книгами для целого поколения ученых-механиков.

Настоящая книга необычна, она существенно отличается от большей части издаваемой литературы по механике. Это не учебник для первичного ознакомления с предметом и не научная монография в строгом понимании этого слова. Лучше всего ее содержание можно, видимо, определить как обзор основных идей, лежащих в основе механики разрушения. Эта работа написана на основе курса лекций для спе-

циалистов-механиков, прочитанного Ю. Н. Работновым во Франции, в университете Пуатье. Этим объясняется лекционный характер ее построения. В книге нет строгих решений задач и громоздких формул. Общеизвестные результаты приводятся, как правило, без доказательств и подробных ссылок. Основное внимание направлено на разъяснение существа идей, лежащих в основе математических моделей, предложенных для описания того или иного процесса разрушения. Это позволило в совсем небольшой по объему книге охватить широкий круг проблем механики разрушения. Распространение трещин, вязкое разрушение, квазикрупное разрушение при высоких температурах, накопление повреждений в процессе ползучести, длительная прочность, разрушение композитов — вот перечень основных вопросов, затронутых в работе. Читатель, интересующийся проблемами механики, безусловно с интересом прочтет эту книгу. Если она поможет уяснить некоторые основные идеи механики разрушения и вызовет желание глубже разобраться в том или ином вопросе — значит, цель ее достигнута.

В. Д. Ключников

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая читателю книга касается общих идей науки, которую принято называть механикой деформируемого твердого тела. Этот термин, быть может, и не столь распространенный, объединяет такие понятия, как сопротивление материалов, теория упругости и пластичности, теория вязкоупругости (или наследственной упругости, если следовать определению, данному известным итальянским математиком Вито Вольтерра), теория ползучести и другие разделы, а со сравнительно недавнего времени — и механику разрушения.

С другой стороны, в настоящее время механика сплошной среды преподается как единая дисциплина, включающая в себя механику газов, жидкостей, твердых тел и иных возможных сред. Слушателям таких курсов предлагается общая теория законов поведения, определяющих свойства любых сплошных сред.

Представляется, что в настоящее время следует рассматривать механику деформируемого твердого тела не как конгломерат разнородных дисциплин, а как единую научную теорию, разделяющуюся, разумеется, на различные направления.

С точки зрения приложений, если не считать задач обработки пластических материалов и некоторых проблем геофизики, данная теория может быть применима в широкой области расчета конструкций. Задача ставится так: задана конструкция (машина, сооружение, судно, средство передвижения и т. п.) и условия ее эксплуатации (внешние силы, температура и т. п.). Следует дать заключение о том, будет ли данная конструкция функционировать в течение некоторого времени, либо она выйдет из строя сразу. Следует признать, что ни теория упругости, ни теория пластичности не дают ответа на этот вопрос. Это и явилось причиной возникновения в недавнее время новой отрасли механики твердых тел: механики разрушения.

Могут быть выделены несколько основных направлений развития механики разрушения, и в частности:

1. *Механика распространения трещин* (линейная механика разрушения). Здесь на основе глобальной идеи Гриффитса (1921) развиваются методы повышения сопротивления конструкции с трещиной. Конструкции больших размеров (как, например, роторы турбин, ядерные реакторы) всегда имеют в исходном состоянии трещины, особенно если они собирались с помощью сварки. Данная теория получила развитие в трудах английских и американских авторов. С точки зрения практики, она позволяет дать стандартизированные рекомендации по увеличению константы материала, называемой критическим коэффициентом интенсивности¹⁾.

2. *Механика рассеянного разрушения*. Рассмотрим, например, опыт на усталостное нагружение. Образец, подверженный действию осевых нагрузок, остается неповрежденным большую часть времени. Затем где-либо появляется видимая глазом трещина, которая продолжает расти вплоть до момента полного разрушения. Этот процесс усталостного разрушения может быть разделен на два периода: а) период скрытого накопления невидимых глазом повреждений; б) период образования и распространения трещины.

Если вы располагаете электронным или оптическим микроскопом, то можете и во время первого периода наблюдать маленькие трещины, размер которых не превосходит размера кристаллических зерен. Плотность этих микротрещин растет вплоть до момента образования большой (видимой глазом) трещины.

Длительность первого периода может составлять от 50 до 80% времени полного срока службы образца, почему нам и представляется, что механика рассеянного разрушения является не менее интересной теорией, чем механика распространения трещин.

¹⁾ В этой области существует достаточно активное международное сотрудничество. Так, создан международный орган (Международный конгресс по разрушению), уже проводивший несколько международных конференций.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Твердое тело

Мы будем оперировать терминами феноменологической механики сплошных сред. Физики и металлурги, наблюдающие с помощью микроскопа за изменениями структуры и беспорядочными скольжениями в кристаллических зернах, могут найти такой подход недостаточным и даже неверным. Но следует учесть тот факт, что концепция сплошной среды подвергалась значительным модификациям. Для иллюстрации самой идеи метода мы рассмотрим сначала классическую сплошную среду как систему материальных точек. Положение каждой точки характеризуется тремя числами — ее координатами. В результате предельного перехода мы получим сплошную среду, кинематика которой описывается тремя функциями положения, т. е. деформация этой среды определяется вектором перемещения u .

Представим теперь себе среду, состоящую не из точек, а из маленьких сферических частиц. Каждой из них можно поставить в соответствие репер и угол вращения, т. е. второе векторное поле ω . После предельного перехода к сплошной среде получится среда значительно более сложной структуры (среда Коссера). Кинематика ее описывается двумя векторными полями u и ω , т. е. шестью скалярными функциями.

Можно пойти и значительно дальше, сконструировав среды более сложные, например микрополяризованные.

Теория Коссера относится лишь к изотропным материалам. С точки зрения практики теория армированных структур представляется более перспективной. На рис. 1 изображен материал, армированный ортогональной решеткой жестких волокон. Сопротивление волокон изгибу не

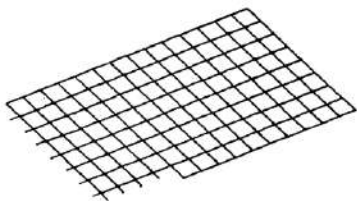


Рис. 1

стремится к нулю при стремлении числа волокон на каждом направлении к бесконечности. Переходя в этом случае к пределу, мы получим среду, в которой не только напряжения, но и моменты входят в уравнения равновесия, граничные условия и определяющие уравнения. Теория сред, обладающих подобной анизотропией, должна быть достаточно сложной. Можно сказать, что в настоящее время она еще не создана.

§ 2. Уравнения состояния

В чисто механических опытах можно измерить лишь силы и перемещения, а также некоторые такие производные от них величины, как, например, напряжения и деформации. Пусть σ есть тензор напряжений, e — тензор деформаций. Для случая больших деформаций и больших вращений следует уточнить определение σ и e тем или иным образом. Наиболее общий вид уравнения состояния будет

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \bar{F}(e). \quad (2.1)$$

Такой подход был предложен В. Вольтерра [2], который в свою очередь руководствовался идеями Фреше. В наше время это направление получило развитие в работах В. Д. Колемана [3], В. Нолла, К. Трусделла [4], А. А. Ильюшина и Б. Е. Победри [5] и т. д.

С другой стороны, можно рассматривать и определяющие соотношения, содержащие производные и дополнительные параметры, которым может быть придан определенный физический смысл. Например, предположим, что

$$e = f(\sigma). \quad (2.2)$$

Здесь e — тензор скоростей деформаций. В предположении малости последних выполняется

$$e = de/d\tau. \quad (2.3)$$

В случае ползучести $\tau = t$, т. е. параметр τ совпадает с физическим временем. В случае пластичности параметр τ является неопределенным: это есть некоторая монотонная и возрастающая функция t .

Важно отметить, что

$$d\tau > 0. \quad (2.4)$$

На следующем шаге необходимо убедиться, что уравнение (2.2) справедливо лишь для структурного состояния

материала. Структурные состояния могут быть идентифицированы с помощью различных физических методов: металлографии, рентгеновских лучей, измерения электропроводности и т. п. С другой стороны, в уравнение (2.2) можно ввести некоторое число параметров состояния q_1, q_2, \dots, q_n , которые могут быть скалярами, векторами, векторными полями и тензорами любого ранга. Тогда вместо (2.2) мы будем иметь

$$\varepsilon = f(\sigma, q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (2.5)$$

На практике число этих параметров не должно быть слишком уж велико.

В физических теориях этим параметрам придается физический смысл, например плотности дислокаций и т. п. Наша же точка зрения будет чисто феноменологической, хотя в итоге мы придем к тому же результату.

Для иллюстрации изложенных идей представим себе материал, свойства которого описываются одним параметром. Как выбрать этот параметр и каков его физический смысл?

Представим себе способ деформирования, называемый эталонным. Предположим, что все структурные состояния материала реализуются в течение этого процесса и что мы можем их как-то идентифицировать, например с помощью микрофотографии. Расположим фотографии $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots$ «в порядке возрастания». Что это будет означать? Мы не располагаем возможностью охарактеризовать каким-то числом состояние, представленное на фотографии m (т. е. A_m), но мы уверены, что состояние A_m предшествует состоянию A_{m+1} (если разница между состояниями достаточно отчетлива). В этом случае будем считать

$$A_{m+1} > A_m.$$

Теперь реализуем другую программу опытов на другом образце, идентичном первому, и получим серию фотографий $B_1, B_2, \dots, B_m, \dots$. Если материал однопараметрический, то для любой фотографии B_s можно найти идентичную в серии A , например фотографию A_k . Запишем $B_s = A_k$.

Структурное состояние в программе B может быть теперь охарактеризовано номером k фотографии эталонной серии или же некоторой монотонной функцией аргумента k :

$$q = q(k). \quad (2.6)$$

На этом этапе параметру q может быть придан определенный физический смысл, например плотности дислокаций.

Высказанное предположение, позволяющее установить соответствие между физическим и механическим подходами, является лишь временным, и мы не настаиваем на его соблюдении. Более предпочтительным представляется сконструировать вид определяющего соотношения как закона, определяющего кинетику изменения параметра q :

$$\dot{q} = \varphi(\sigma, e, q).$$

Приведем теперь несколько примеров.

§ 3. Ползучесть, усталость, пластичность

В этих случаях можно ограничиться двумя параметрами состояния:

а) параметром упрочнения q , вызывающим убывание скорости ползучести на первом этапе; мы рассмотрим уравнения этого типа несколько позднее;

б) параметром поврежденности ω ; образование межзеренных микротрещин эквивалентно уменьшению эффективной площади поперечного сечения образца, так что эффективное напряжение $\bar{\sigma}$ не равно в точности $\sigma = P/F$:

$$\bar{\sigma} = \sigma / (1 - \omega). \quad (3.1)$$

Вот почему на третьей стадии ползучести происходит увеличение скорости ползучести. Когда ω достигает значения единицы, эффективная площадь стремится к нулю, и образец ломается.

При достаточно высоких температурах упрочнение не играет никакой роли, и основное влияние оказывает параметр ω . Уравнения, описывающие поведение материала, имеют вид

$$\dot{e} = f(\sigma, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, e, \omega). \quad (3.2)$$

Параметр ω понимается здесь в несколько более широком смысле, чем в уравнении (3.1). Сейчас уже не говорится о плотности микротрещин или об уменьшении эффективной площади сечения. Здесь ω понимается как параметр, монотонно растущий с увеличением плотности микротрещин, имеющий в начале опыта значение 0, а в момент разрушения 1.

Аналогичная теория может быть построена для описания явления усталостного разрушения. Если пренебречь изменениями структуры внутри цикла, то для n -го цикла можно получить выражение

$$\dot{e} = de/dn, \dots$$

Здесь под e понимается необратимая деформация, накопленная к моменту, соответствующему n -му циклу. Внутри каждого цикла нагружения параметр ω предполагается постоянным. Теории данного вида были предложены А. Г. Костюком¹⁾ для обычной усталости и Левиной — для малоцикловой (100—200 циклов).

Если мы вернемся к традиционной пластичности, то можем обратиться к классической диаграмме напряжение — деформация (оси e и σ на рис. 2). Если не производить разгрузки, то нельзя определить, является данный материал нелинейно-упругим или пластическим. В случае чистой пластичности линия разгрузки будет прямой, параллельной линейно-упругому участку диаграммы (рис. 2).

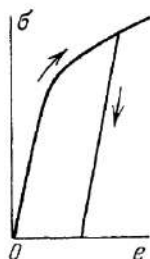


Рис. 2

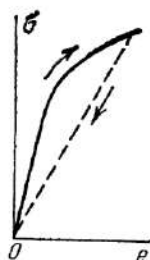


Рис. 3

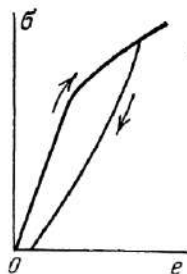


Рис. 4

С другой стороны, можно представить себе упругий материал, подчиняющийся закону Гука в первом приближении. Растяжение образца сопровождается образованием микротрещин, т. е. увеличением параметра ω , понимаемого, например, в смысле формулы (3.1). Диаграмма напряжение — деформация будет похожей на диаграмму идеально-пластического тела, и при нагружении образца различить эти две диаграммы будет невозможно. Но у упругого материала деформация в любой момент остается чисто упругой. (Нелинейность диаграммы есть следствие уменьшения площади поперечного сечения образца.)

Разгрузка будет происходить по прямой линии, направленной к началу координат, как показано на рис. 3. Так называемая деструктивная пластичность характерна для полимерных материалов. Соответствующая диаграмма представлена на рис. 4. Пластичность, соответствующая данному телу, имеет почти всюду разрушающий характер.

¹⁾ См.: Костюк А. Г. Расчет профиля вращающегося диска для условий ползучести//ПММ.— 1953.— Т. 17, № 5.— С. 615—618.

Образование мелких внутренних трещин наблюдается и в металлах: имеются данные металлографического анализа этого явления и существуют попытки введения описанных концепций в теорию пластичности. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже.

§ 4. Разрушение вследствие геометрических изменений

Мы рассмотрим здесь два простых случая.

1. *Пластичность*. Пусть $\sigma_0 = P/F_0$, $\sigma = P/F$ (действительное напряжение). Материал предполагается несжимаемым, так что

$$F_0 l_0 = Fl,$$

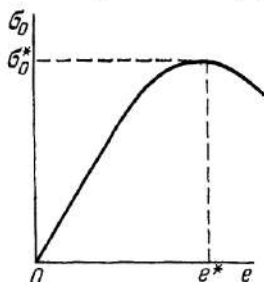
где

$$F = \frac{F_0 l_0}{l} = \frac{F_0}{1+e}, \quad \sigma = \sigma_0 (1+e).$$

Предположим, что закон пластичности есть

$$\sigma = C e^{1/m} \Rightarrow \sigma_0 = C \frac{e^{1/m}}{1+e}. \quad (4.1)$$

Соотношение (4.1) представлено на диаграмме рис. 5. Видно, что напряжение σ_0 достигает максимального значения σ_0^* при деформации e^* . Легко выводится



$$e^* = 1/(m-1). \quad (4.2)$$

2. *Ползучесть*. В данном случае удобно ввести логарифмическую шкалу деформаций $\bar{e} = \ln(l/l_0)$. Тогда скорость деформации выразится как

$$\dot{\bar{e}} = \dot{l}/l = \dot{\epsilon}.$$

Рис. 5

Закон ползучести возьмем в виде

$$\dot{\bar{e}} = A \sigma^m.$$

Легко получают выражения $\sigma = \sigma_0 \exp \bar{e}$ и

$$\dot{\bar{e}} = A \sigma_0^m \exp(m\bar{e}) = \epsilon_0 \exp(m\bar{e}).$$

Под критическим временем t_* понимается момент времени, когда деформация \bar{e} становится бесконечной. После интегрирования получим

$$t_* = 1/m\epsilon_0. \quad (4.3)$$

§ 5. Теория Гриффитса

Хорошо известно, что теоретическая прочность твердых тел, рассчитанная по той или иной атомистической модели, во много раз превосходит реальную прочность (в сотни или даже тысячи раз). Гриффитс ¹⁾ (1920) первым предложил объяснение этого факта: он предположил, что любое реальное тело содержит маленькие трещинки, которые могут либо увеличиваться под нагрузкой, либо же случайным образом оставаться такими же.

Анализ размерностей позволяет «на пальцах» получить результат Гриффитса. Рассмотрим часть тела, подверженную усилиям растяжения и находящуюся в условиях однородной деформации. Напряжение описывается одной компонентой σ , модуль упругости есть E , упругая энергия на единицу объема есть

$$U \sim \sigma^2/E. \quad (5.1)$$

Здесь опущен множитель $1/2$, как, впрочем, и все другие безразмерные множители ниже.

Предположим, что наше тело содержит лишь круговую трещину радиуса R . Вокруг трещины происходит разгрузка. С точностью до безразмерного коэффициента полная энергия будет $(\sigma^2/E)R^3$ (так как объем имеет размер куба с ребром R). Изменение упругой энергии тогда будет (с точностью до безразмерного множителя)

$$\Delta U \sim -\frac{\sigma^2}{E} R^3. \quad (5.2)$$

Если размер трещины станет $R+dR$, то вариация упругой энергии (с точностью до безразмерного множителя) будет

$$\frac{\sigma^2}{E} R^2 dR. \quad (5.3)$$

Это уменьшение упругой энергии может быть компенсировано увеличением поверхностной энергии

$$\gamma R dR. \quad (5.4)$$

¹⁾ Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. //Philos. Trans. of Roy. Soc. of London.— 1920.— Ser. A, V. 221.— P. 163—198.

Если уравнение энергетического баланса содержит лишь эти два члена, то приравнявая (5.3) и (5.4), получим (с точностью до безразмерного множителя) формулу Гриффитса

$$\sigma = C \sqrt{\frac{\gamma E}{R}}. \quad (5.5)$$

Коэффициент C не может быть, разумеется, определен лишь на основе анализа размерностей.

Для стекла значение γ , входящего в (5.5), оказывается достаточно близким к значениям, получаемым различными физическими методами. Напротив, для металлов величина γ из (5.5) оказывается на 3 порядка больше, чем определяемая поверхностной энергией.

Объяснение данному факту было дано Дж. Ирвином¹⁾ и Е. О. Ороуаном. И действительно, перед кончиком трещины расположена пластическая зона (см. рис. 6). Распространение трещины сопровождается работой пластической деформации. Пусть G_c есть величина этой работы на единицу длины трещины и на единичное ее приращение. Величина G_c имеет размерность силы на единицу длины, и поэтому называется силой сопротивления распространению трещины. Если глуби-

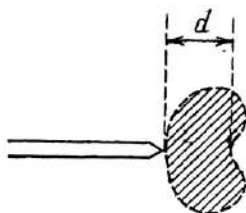


Рис. 6

на пластической зоны d мала, т. е. $d \ll R$, то результаты анализа размерностей справедливы и справедлива формула (5.5), где γ заменяется на G_c .

§ 6. Антиплоская деформация

Рассмотрим наиболее простой случай — антиплоскую деформацию, для которой

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = \frac{1}{\mu} u(x_1, x_2)$$

(гипотеза Сен-Венана). Напомним, что

$$\sigma_{3\alpha} = \tau_{\alpha} = u,_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2),$$

¹⁾ Irwin G. Analysis of stresses and strains near the end of a crack//J. Appl. Mech.—1957.—V. 24, № 3.—P. 361—364; Ороуан E. O. Fundamentals of brittle behaviour in metals//Simp. Fatigue and Fracture of Metals.—N. Y.: Willey. 1952.—P. 139—167.

в то время как остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. В обычных обозначениях положим

$$w(z) = u(x_1, x_2) - iv(x_1, x_2),$$

где v — гармоническая функция, сопряженная к u , т. е.

$$u = \operatorname{Re} w, \quad \tau_1 - i\tau_2 = w'. \quad (6.1)$$

Для функции комплексного переменного w имеется граничное условие

$$\operatorname{Im} w|_{\Gamma} = \int T ds, \quad (6.2)$$

где T — усилие, s — криволинейная координата точки на границе Γ области s .

Рассмотрим теперь упругую бесконечную плоскость с вырезом длины $2c$ (см. рис. 7), определенным как $x_1 \in [-c, +c]$, $x_2 = 0$.

Условия на бесконечности есть

$$(\tau_1)_{\infty} = 0, \quad (\tau_2)_{\infty} = \tau_{\infty}.$$

Теперь можно определить и функцию

$$w(z) = -\tau_0 i \sqrt{z^2 - c^2}, \quad w'(z) = \frac{-\tau_0 i z}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad (6.3)$$

что удовлетворяет (6.2).

На вырезе вследствие условия свободной поверхности выполняется условие $\operatorname{Im} w'(z) = 0$.

С другой стороны, для $x_2 = 0$, $|x_1| > c$ справедливо $\operatorname{Re} w(z) = 0$, так как вне выреза вектор перемещений непрерывен.

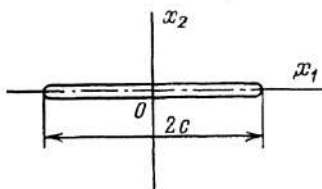


Рис. 7

Рассмотрим теперь напряженное состояние на небольшом расстоянии перед кончиком выреза и перемещение на том же небольшом расстоянии, но уже сзади кончика выреза.

Положив $z = c + \rho_+$, находим из второй формулы (6.3)

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \tau_{\infty} \sqrt{\frac{c}{2\rho_+}}.$$

С другой стороны, при $z = c - \rho_-$ первая из (6.3) дает

$$u_3 = \frac{\tau_{\infty}}{\mu} \sqrt{2c\rho_-}.$$

Или, перегруппировав эти формулы, можно временно ввести обозначения

$$K = \sqrt{\pi c} \tau_{\infty}. \quad (6.4)$$

Эта величина K (ниже мы назовем ее K_{III}) есть коэффициент интенсивности напряжений.

Выражения для напряжения и перемещения вблизи кончика выреза запишутся как

$$\tau_z = \frac{K}{\sqrt{2\rho_+}}, \quad u_z = \frac{K}{\mu} \sqrt{\frac{2\rho_-}{\pi}}. \quad (6.5)$$

Отсюда следует важный вывод.

Можно, разумеется, решать каждый раз заново плоскую задачу для произвольного тела с подобным вырезом, подверженного действию произвольной внешней нагрузки. Решение будет значительно более сложным, однако сингулярность вблизи конца разреза всегда будет иметь порядок $\rho^{-1/2}$ для напряжений и формулы (6.5) будут справедливы как асимптотические, дающие основные члены в разложениях.

§ 7. Работа продвижения трещины

Изложенные выше рассуждения тесно связаны с теорией Гриффитса.

Предположим, что относительное перемещение точек, соответствующих обоим границам трещины, представляется

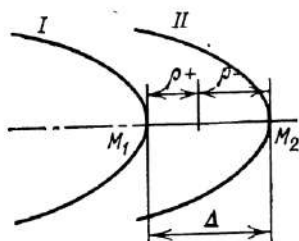


Рис. 8

кривой I (рис. 8). На основании (6.5) можно заключить, что форма трещины вблизи ее края является параболической. Предположим, что трещина переходит в положение II на расстояние

$\Delta = |M_1 M_2|$. Работа на перемещение вычисляется по теореме Клапейрона. Разрез продолжается от M_1 до M_2 и прикладываются

силы, равные напряжениям, вычисленным на сторонах трещины.

В этом случае получим $\rho_+ + \rho_- = \Delta$, откуда, положив $\rho_+ = \rho$, $\rho_- = \Delta - \rho$, запишем выражение для работы

$$\delta A = G\Delta = \frac{K}{2\mu} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta - \rho}{\rho}} d\rho.$$

И, вычисляя интеграл, окончательно

$$G = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2. \quad (7.1)$$

Теперь уже легко судить и о распространении трещины. Если G , определяемое по (7.1), не достигает критического для данного материала значения G_c , то трещина устойчива. Она становится неустойчивой, когда G достигает или превышает G_c . Пользуясь (7.1), можно судить об устойчивости трещины, сравнивая значение K с критическим значением коэффициента интенсивности K_c (в нашем случае K_{IIIc}).

Для устойчивой трещины должно быть

$$K < K_c. \quad (7.2)$$

§ 8. Плоская деформация

В случае плоской деформации расчет несколько осложняется. Однако применение методов теории функций комплексного переменного (см., например, хорошо известную монографию Н. И. Muskhelishvili [6]) или метода Вестергаарда [7] позволяет прийти к аналогичным результатам. Сингулярность вблизи конца трещины дается формулой, аналогичной первой из (6.5), а именно

$$\sigma_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_+}} K_I, \quad (8.1)$$

где

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi c}.$$

Для иллюстрации можно снова воспользоваться рис. 7, но уже с условиями на бесконечности

$$(\sigma_{11})_\infty = (\sigma_{12})_\infty = 0, \quad (\sigma_{22})_\infty = \sigma_\infty.$$

Отметим, что коэффициент интенсивности для компоненты σ_{11} тот же, что для σ_{22} , и справедлива асимптотическая формула

$$\sigma_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_+}} K_I.$$

Отсюда следует, что отношение σ_{22}/σ_{11} стремится к единице при изменении аргумента вдоль оси x_1 . Для другого пути (если он существует) предел, возможно, будет иным.

Мы не приводим формулу для перемещения, которая аналогична второй из (6.5) (с другим множителем). Для получения связи между G_I и K_I следует повторить рассуждения для антиплоского случая. В итоге получим

$$G_I = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$$

(для традиционных обозначений модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν).

З а м е ч а н и е. Индексы I, II, III соответствуют трем типам растрескивания. Напряженное состояние вблизи трещины всегда может быть представлено в виде комбинации трех простейших напряженных состояний (рис. 9):

I. Растяжение в направлении, ортогональном оси трещины.

II. Сдвиг в плоскости x_1x_2 .

III. Сдвиг в плоскости x_1x_3 .

(Мы рассмотрели несколько более детально случаи I и III. Формулы для случая II получаются аналогично.)

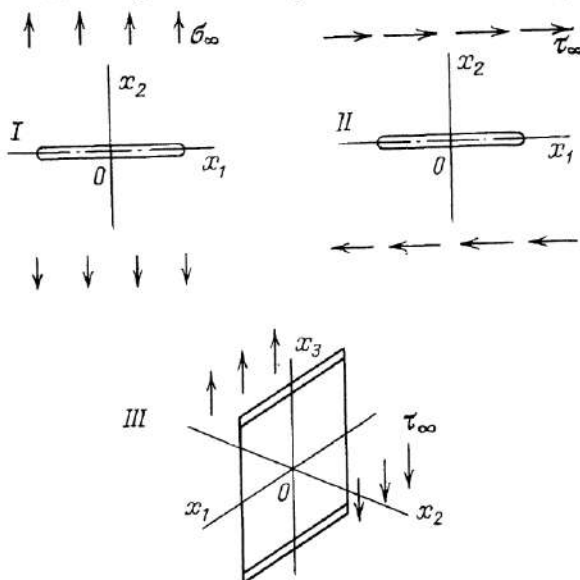


Рис. 9

Например, для нахождения K_I нужно решить некоторую задачу теории упругости. Известны решения как в замкнутой форме, так и в табличной и графической.

Ограничимся простым случаем разреза $x_2=0$, $x_1 \in]-c, +c[$ в бесконечной плоскости. Обозначив через $p(x)$ плотность нормальной нагрузки (одинаковую для обоих краев трещины), находим для правого конца

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c p(\xi) \sqrt{\frac{c+\xi}{c-\xi}} d\xi.$$

Если $p(x)$ — четная функция, то значение коэффициента интенсивности для обоих краев трещины будет

$$K = 2 \sqrt{\frac{c}{\pi}} \int_0^c \frac{p(\xi)}{\sqrt{c^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (8.2)$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Случай, когда растяжение равно нулю на трещине и σ_∞ на бесконечности. Заменяв нулевое растяжение на трещине величиной $p(\xi) = \sigma_0$ и положив $(\sigma_{22})_\infty = 0$, получим из (8.2) результат, аналогичный (8.1)

$$K = \sigma_\infty \sqrt{\pi c}.$$

2. Случай, когда две силы, равные и противоположно направленные, приложены в середине, как на рис. 10. Интеграл тогда сводится к P/c , и

$$K = \frac{2P}{\sqrt{\pi c}}.$$

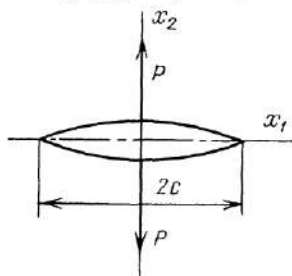


Рис. 10

Пусть теперь $(\sigma_{22})_\infty = -\sigma_\infty$, и силы имеют величину P . Трещина длиной $2c$ будет устойчива и ее длина определяется соотношением

$$-\sigma_\infty \sqrt{\pi c} + \frac{2P}{\sqrt{\pi c}} = K_{Ic}.$$

Для скальных пород и для грунтов значение прочности K_{Ic} может рассматриваться как пренебрежимо малое, откуда следует, что длина устойчивой трещины будет

$$c = \frac{2P}{\pi \sigma_\infty}.$$

Эти простые рассуждения использовались С. А. Христиановичем как исходные предпосылки для построения теории разрушения угольных пластов в шахтах.

Теория, которую мы рассматриваем, справедлива лишь для размеров зон пластичности, малых по сравнению с длиной трещины. Следует отметить, что размерность K есть $P/L^{3/2}$, где P — сила, L — длина.

Размер пластической зоны зависит также от величины предела текучести σ_s . Из K_{Ic} и σ_s можно образовать лишь

одну комбинацию с размерностью длины, а именно

$$d = \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2, \quad (8.3)$$

которая и дает (с точностью до безразмерного множителя) размер пластической зоны, изображенной на рис. 6.

§ 9. Модель Панасюка — Леонова — Дагдейла

Советские авторы В. В. Панасюк и М. Я. Леонов [8] и американский автор Дагдейл [9] приблизительно одновременно (1958—1959 гг.) предложили независимо друг от друга простую модель пластической зоны вблизи кончика трещины. Однако исходные точки зрения этих авторов существенно различались.

В. В. Панасюк и М. Я. Леонов рассматривали трещину на атомном уровне. Они предположили, что нелинейное

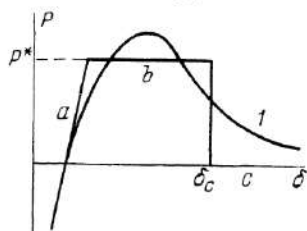


Рис. 11

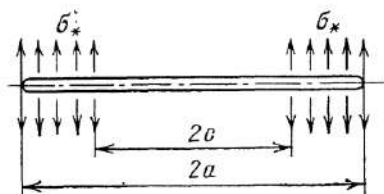


Рис. 12

взаимодействие сконцентрировано лишь между двумя атомными уровнями. На рис. 11 кривая I представляет зависимость между межатомной силой P и межатомным расстоянием δ . Эта кривая заменяется кусочно-линейной, причем отрезок a соответствует линейно-упругому взаимодействию, сегмент b — постоянной силе P^* и критическое значение δ_c соответствует нулевой силе на участке c .

Это приводит к модели, изображенной на рис. 12. Часть поверхности трещины $|x_1| < c$ свободна от напряжений, а другая, $|x_1| \in [c, a]$, нагружена постоянной силой P , равной σ_* . Вне отрезка $x_2=0, x_1 \in [-a, +a]$ оси x_1 материал остается упругим.

Из формулы (8.2) находим

$$\frac{c}{a} = \cos \frac{\pi \sigma_\infty}{2 \sigma_*}. \quad (9.1)$$

Формула (9.1) позволяет определить длину пластической зоны в тех случаях, когда линейная механика разрушения

бессильна. Величина $d=a-c$ может быть достаточно большой, и она стремится к бесконечности при $\sigma_{\infty} \rightarrow \sigma_*$. Напротив, для $\sigma_{\infty} \ll \sigma_*$, разлагая косинус в ряд и оставляя два первых члена ряда, получим

$$d \sim \frac{\pi^2}{8} \frac{\sigma_{\infty}^2}{\sigma_*^2} c = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_{1c}}{\sigma_*} \right)^2.$$

Дагдейл получил те же результаты, исследуя напряженное состояние в тонкой плите, содержащей трещину, длина которой во много раз превосходит толщину плиты. В этом случае легко можно построить точное решение упруго-пластической задачи. Граница пластической зоны образуется из прямолинейных отрезков AB , CD , а пластическое течение происходит в плоскостях, составляющих угол $\pi/4$ с границей плиты (рис. 13). Формальный аспект расчета тот же, что и в двух рассмотренных выше случаях.

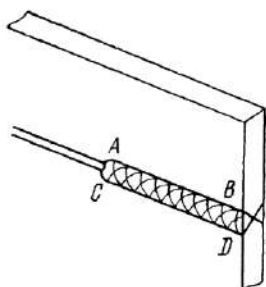


Рис. 13

Можно указать на множество публикаций, касающихся решения упруго-пластической задачи для тела с трещинами. Для случая плоской деформации ситуация сходна с изображенной на рис. 6, но не на рис. 12, что подтверждается многими известными численными решениями данной задачи.

Относительно самих решений следует указать на один их общий недостаток. Деформации в пластической зоне являются очень большими, порядка 100% для мягкой стали. Таким образом, здесь можно воспользоваться теорией пластичности больших деформаций и вращений, либо же учесть изменения геометрии, выписав граничные условия на деформированной границе. Можно также оперировать уравнениями линейной теории упругости совместно с уравнениями теории малых пластических деформаций, что приводит к игнорированию нелинейно-геометрического характера задачи.

§ 10. Интеграл Райса — Черепанова

Пусть W есть плотность упругой энергии, зависящая от компонент тензора деформаций $e_{ij} = u_{(i,j)}$. Утверждается, что интеграл

$$J = \int_A^B \left(W dy - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} n_j ds \right) \quad (10.1)$$

(где $x_1 = x$, $x_2 = y$) не зависит от пути интегрирования между точками A и B [9].

Для доказательства необходимо показать, что этот интеграл обращается в нуль для любого замкнутого пути. С другой стороны, можно доказать, что если A и B взяты на разных сторонах трещины, то

$$J = -G. \quad (10.2)$$

Полная упругая энергия, содержащаяся в области S с границей Γ , будет

$$U = \int_S W \, dx \, dy - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u_i n_j \, ds.$$

Пусть конец трещины продвинулся на расстояние Δ . Сила сопротивления оказывается равной $G = \partial U / \partial \Delta$, контур Γ заменяется Γ' , перемещения u становятся равными $u + \partial u / \partial \Delta$. Заменяв текущую координату x на $x - \Delta$, запишем (см. рис. 14)

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} = - \frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассматривая U как функцию Δ , получим

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta} = - \int_S \frac{\partial W}{\partial x} \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} n_j \, ds,$$

что ведет к равенству (10.2), справедливому не только в случае упругого тела, подчиняющегося закону Гука, но и для любой среды, допускающей потенциал напряжений, т. е. функцию W такую, что

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial e_{ij}.$$

Такого рода зависимости лежат в основе теории пластичности Генки — Надаи, и концепция интеграла J может быть использо-

зована при наличии вблизи кончика трещины пластической зоны. Следует отметить, что теория Генки — Надаи справедлива с некоторой степенью приближения. Например, если материал в пластической зоне подчиняется закону теории пластического течения, то формула (10.2) становится, вообще говоря, неверной. То же самое происходит в случае движущейся трещины, так как за пластической зоной происходит разгрузка материала.

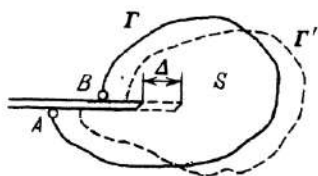


Рис. 14

Рассмотрим теперь два простых случая, иллюстрирующих применение формулы (10.2).

1. Закон упругости (или пластичности) вида

$$\sigma \sim e^\alpha. \quad (10.3)$$

(Это уравнение, разумеется, может быть записано в тензорном виде — если учесть основные факторы, влияющие на поведение материала. Однако для нашей цели лишь показатель экспоненты α представляет интерес.)

Пусть деформация есть функция пространственной координаты r вида

$$e = r^n, \text{ откуда } \sigma \sim r^{n\alpha}.$$

Тогда плотность упругой энергии есть (с точностью до множителя)

$$W \sim r^{(n+1)\alpha}.$$

Для существования интеграла (10.1) необходимо, чтобы

$$n(1+\alpha) = -1,$$

или

$$n = -\frac{1}{1+\alpha}, \quad n\alpha = -\frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

В случае линейно-упругого тела имеем $\alpha=1$, и особенности для деформации и напряжения будут одного типа, т. е. $r^{-1/2}$ для малых r .

В предельном случае материала без упрочнения имеем

$$\alpha=0, \quad n=-1.$$

Напряжение останется конечным, а деформация имеет сильную особенность, типа $1/r$ для малых r .

2. Раскрытие трещины δ . Мы возвращаемся к теории, представленной в § 9, и хотим рассчитать раскрытие трещины в точках $(\pm c, 0)$.

Пусть $\delta = u_2^+(c, 0) - u_2^-(c, 0)$, где индексы $+$ и $-$ обозначают два берега трещины.

Выбрав путь интегрирования, как на рис. 15, получим $dy=0$, $\sigma_{ij}n_j = \sigma_*$, и далее

$$G = -J = \sigma_* (u_2^+ - u_2^-) = \sigma_* \delta.$$

Это можно записать и в виде

$$(1-\nu^2) \frac{K_I^2}{E\sigma_*} = \delta. \quad (10.4)$$

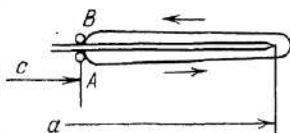


Рис. 15

Структура этой формулы вытекает из анализа размерностей (как это было и в случае (8.2)).

В общем случае справедливо

$$G = m\sigma_s\delta, \quad (10.5)$$

где параметр m может быть рассчитан для реальной пластической зоны (необязательно для модели Леонова — Панасюка). Началу продвижения трещины соответствует критическое раскрытие трещины δ_c (в англо-американской терминологии: *COD* — перемещение при раскрытии трещины). Для определения критического значения K , т. е. K_{Ic} , необходимо измерить δ_c в момент начала движения трещины, что делается с помощью выражения, аналогичного (10.5).

В большинстве практических случаев можно считать, что величина d пластической зоны имеет тот же порядок, что и толщина пластины. Отметим, что интегрирование соответствующей трехмерной задачи не может дать напряженного состояния в кончике трещины. Поэтому обычно m определяется экспериментальным путем. При этом, естественно, результат зависит от формы образца и от условий опыта.

§ 11. Выводы главы 2

Мы не хотим настаивать на применении практических методов или на экспериментальном определении прочности. Отметим лишь, что нелинейная механика может быть применена здесь лишь в редких случаях.

Для мягких сталей со значительной прочностью значение d (рассчитанное или измеренное) может быть того же порядка, что и величины линейных размеров образца. Для получения достаточно надежного значения K_{Ic} необходимо, таким образом, выбирать громоздкие образцы, что сопряжено с трудностями как их изготовления, так и испытания.

Этим и объясняется большой интерес к развитию методов, основанных на J -интеграле, например на *COD*.

Заметим, что K_{Ic} с понижением температуры убывает, хотя σ_s растет с убыванием температуры. В итоге пластическая зона становится более узкой, и появляется возможность определения K_{Ic} на образцах достаточно малых размеров.

Для перлитных сталей K_{Ic} есть функция температурного превышения

$$T_e = T - T_{tr},$$

где T_{tr} — температура перехода, соответствующая 50%-й вязкой деформации образца Шарпи. Данные, иллюстрирующие это, представлены на рис. 16.

Если K_{Ic} известно, то расчет конструкции может быть произведен по упрощенной схеме. В качестве исходной точки берется формула (5.5):

$$\sigma \sim \sqrt{\frac{G}{c}}. \quad (11.1)$$

Затем мы следуем вдоль кривой, представляющей зависимость критического напряжения σ от длины трещины (см. рис. 17). Эта зависимость имеет смысл лишь для самых низких σ на пороге пластичности. Другими словами, когда мы достигаем начала пластичности, пластическая зона становится большой, и линейная механика (откуда и получена (11.1)) теряет свой смысл. Расчеты и опытные данные показывают, что для сталей (11.1) справедливо при $\sigma < 0,8\sigma_s$.

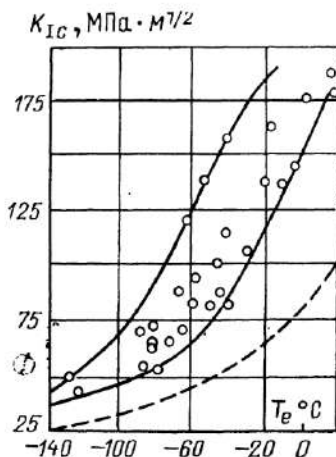


Рис. 16

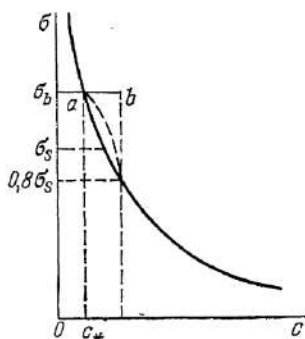


Рис. 17

Для значений $0,8\sigma_s < \sigma < \sigma_b$ (σ_b — напряжение разрушения) задача становится нелинейной. Можно теоретически показать, что в нелинейной области кривая $\sigma \sim c$ расположена выше гиперболической кривой, соответствующей (11.1) (изображена штриховой линией на рис. 17). Разница составляет величину порядка 10—15 %. Такими величинами вполне можно пренебречь, и принято, что область допустимых состояний материала расположена между кривой, определяемой (11.1) и горизонтальным отрезком ab .

Обозначим критическую длину трещины c_* . Если $c > c_*$, будем пользоваться результатами линейной механики разрушения. Если, напротив, $c < c_*$, будем игнорировать наличие трещины.

Если c_* ниже разрешающей способности измерительной аппаратуры (ультразвуковые волны, рентгеновские лучи, гамма-излучения) и невозможно достаточно надежно определить наличие трещины, то ее наличием пренебрегают и проводят расчеты традиционными методами, следя за тем, чтобы главное напряжение σ_1 не превышало σ_b/n (где n — коэффициент запаса).

Глава 3. ПОЛЗУЧЕСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ МЕТАЛЛОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

§ 12. Ползучесть металлов при высоких температурах

Здесь в первую очередь надо отметить, что имеющиеся данные для исследования явления высокотемпературной ползучести получены главным образом в результате опытов на растяжение. Цилиндрический образец с длиной, во много раз превосходящей диаметр или размер поперечного сечения, подвергался воздействию постоянной нагрузки. Результаты опытов представляются, как правило, в виде так называемых кривых ползучести. Типовая кривая ползучести при постоянном напряжении приведена на рис. 18.

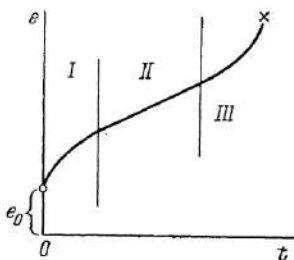


Рис. 18

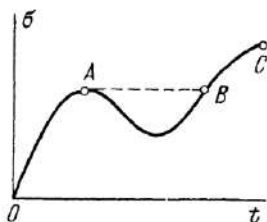


Рис. 19

Весь процесс условно разбивается на три типа:

1. Неустойчивая ползучесть, когда скорость деформации убывает.
2. Устойчивая ползучесть, когда скорость деформации постоянна.

3. Ускоряющаяся ползучесть, предшествующая разрушению.

Введение понятия «высокой температуры» существенным образом зависит от температуры плавления заданного материала. Например, так как температура плавления свинца примерно 600 °K, то ползучесть при «лабораторной температуре» в районе 300 °K уже можно рассматривать как феномен «высокой температуры».

Пусть e_0 — мгновенная деформация, включающая в себя в общем случае упругий и пластический члены:

$$e_0 = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma_{\max}),$$

где σ_{\max} — максимальное значение напряжения во временном интервале, предшествующем рассматриваемому моменту. Поведение напряжения как функции времени иллюстрируется диаграммой на рис. 19.

Для участков OA и BC кривой можно записать

$$e_0 = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma) \quad (12.1)$$

(где g есть монотонная возрастающая функция).

Мгновенная деформация зависит лишь от текущей величины напряжения.

Но для участка между A и B уже выполняется равенство

$$e_0 = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma_A),$$

так как пластическая деформация, соответствующая точке A , остается неизменной.

На втором этапе ползучести скорость есть функция лишь напряжения и температуры. Эта зависимость изучалась многими авторами и для большого числа материалов. В большинстве случаев она нелинейна. Предлагались различные виды зависимости $v = \dot{e}$ от σ :

$$v = B\sigma^n, \text{ или } v = k \exp \sigma/A, \text{ или } v = 2k \operatorname{sh} \sigma/A. \quad (12.2)$$

Вторая из этих формул имеет тот недостаток, что дает отличную от нуля скорость ползучести при $\sigma=0$. Третья достаточно мало отличается от второй при больших σ , но для малых σ дает удовлетворительный результат

$$v \sim \frac{2k}{A} \sigma.$$

Две первых стадии ползучести могут быть описаны с помощью так называемой теории упрочнения. Здесь предпо-

лагается, что скорость деформации зависит не только от напряжения σ , но и от параметра упрочнения.

Если e есть полная деформация, а e_0 — мгновенная из формулы (12.1), то

$$p = e - e_0 \quad (12.3)$$

для деформации ползучести p . Заметим, что следует различать пластическую деформацию ползучести p и мгновенную пластическую деформацию $g(\sigma)$. Хотя обе они являются деформациями пластическими, но их свойства с металлургической точки зрения сильно различаются. (В англо-американской терминологии: грубое скольжение для существенных скольжений, происходящих даже между параллельными достаточно удаленными плоскостями, и малое скольжение для скольжений ползучести, самих по себе почти минимальных, но проявляющихся при глобальном деформировании материала.)

Это объясняет различные роли, которые они исполняют в уравнении состояния.

Запишем теперь

$$\dot{p} = f(\sigma, q). \quad (12.4)$$

Наиболее простая гипотеза состоит в принятии за параметр q самой деформации ползучести, т. е. $q = p$. Тогда мы придем к так называемому уравнению Людвига и Надаи, позволяющему почти с достаточной точностью описать результаты опытов, даже для нагрузений по «произвольному» закону.

С другой стороны, можно в качестве параметра упрочнения выбрать

$$q = \int_{p_0}^p \sigma(\pi) d\pi, \quad (12.5)$$

означающий работу, рассеянную в процессе ползучести.

Обобщение на трехмерный случай очевидно.

§ 13. Разрушение при растяжении

Маленький крестик на кривой ползучести (см. рис. 18) соответствует моменту разрушения образца. Деформация e_* в момент разрушения может быть как большой, так и малой — это зависит от материала, условий эксперимента, температуры, величины нагрузки.

Отбросив в сторону эти аспекты (мало изученные в общей постановке), рассмотрим экспериментальную програм-

му исследования величины сопротивления материала как функции времени. Пусть некоторое число идентичных образцов подвергается в течение длительного времени нагружению напряжениями растяжения σ_0 различной величины, и в каждом случае измеряется время до разрушения t_* . На плоскости (t_*, σ_0) можно, таким образом, построить кривую, называемую кривой длительной прочности. Удобнее представлять ее в логарифмических координатах, как на рис. 20. Эта кривая состоит из двух почти линейных участков: первый из них (участок 1) соответствует явлению вязкого разрушения, а второй (участок 2) — хрупкого. Измерив полную деформацию после разрушения, можно видеть, что при вязком разрушении удлинение довольно существенно, а при хрупком оно мало.

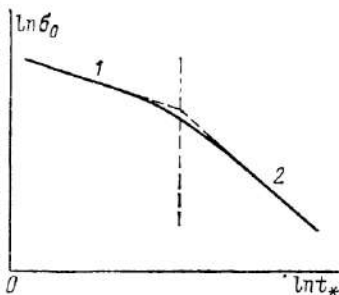


Рис. 20

Разумеется, на реальных диаграммах угловая точка должна быть заменена участком плавного перехода.

Интересные результаты дают опыты на свинцовых образцах при лабораторной температуре. При приложении существенной нагрузки образец ломался за несколько секунд с деформацией порядка 100 %. Снижение величины нагрузки в два раза приводило к разрушению за несколько дней, причем к хрупкому, с полной деформацией 1—2 %. Это ясно показывает, что в каждом из случаев внутренние механизмы явления различны.

Рассмотрим более подробно процесс вязкого разрушения. Вследствие больших деформаций можно пренебречь упругой частью, а также деформацией, накопленной на первом этапе ползучести.

Запишем для скорости деформации

$$\dot{\varepsilon} = g'(\sigma) \dot{\sigma} - \dot{\nu}(\sigma). \quad (13.1)$$

Из-за наличия больших деформаций выберем логарифмический масштаб $\bar{\varepsilon} = \ln(l/l_0)$ для измерения степени деформирования. Таким образом,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{l}/l = \dot{\bar{\varepsilon}}.$$

Обозначим традиционно через σ_0 условное напряжение, т. е. величину силы растяжения, деленную на величину

начальной площади сечения образца (на рис. 20 в качестве координаты использовано $\ln \sigma_0$). Для реального напряжения получим

$$\sigma = \frac{F_0}{F} \sigma_0,$$

или, учитывая условие сохранения объема,

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\bar{\epsilon}).$$

Взяв производную по времени, запишем

$$\dot{\sigma} = \sigma_0 \exp(\bar{\epsilon}) \dot{\bar{\epsilon}} = \sigma \dot{\bar{\epsilon}}.$$

Внеся $\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\sigma}/\sigma$ в (13.1), придем к дифференциальному уравнению

$$\dot{\sigma} \left[\frac{1}{\sigma} - g'(\sigma) \right] = v(\sigma).$$

Если член в скобках равен нулю, то величина $\dot{\sigma}$ должна быть бесконечной — это мы и примем за наступление разрушения. Таким образом, необходимо найти решение σ_* уравнения

$$\frac{1}{\sigma} - g'(\sigma) = 0. \quad (13.2)$$

После интегрирования, учтя, что $\bar{\epsilon} = \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}$, имеем

$$t = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\frac{1}{\xi} - g'(\xi)}{v(\xi)} d\xi. \quad (13.3)$$

В плоскости (t, σ) это есть кривая, изображенная на рис. 21. Видно, что при $\sigma \rightarrow \sigma_*$, $t \rightarrow t_*$ скорость деформации стремится к бесконечности. Величина t_* называется временем до разрушения.

Если пренебречь мгновенной пластической деформацией, то из (13.3) следует

$$t = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\xi}{\xi v(\xi)} \quad (13.4)$$

и значение интеграла остается конечным при $\sigma \rightarrow \infty$. Соответствующая кривая изображена штриховой линией на рис. 21.

Долговечность материала t'_* , рассчитанная по (13.4) для $\sigma \rightarrow \infty$, будет больше, чем величина t_* , получающаяся из (13.3) для $\sigma = \sigma_*$, хотя разница и не так уж велика.

Заметим, что мгновенное разрушение образца происходит при некотором σ достаточно большом, но конечном. Верхний предел интегрирования в формуле (13.4) должен быть конечным. С учетом разброса экспериментальных данных представляется сомнительным путь дальнейшего уточнения приведенных выкладок.

Разумеется, приведенная схема упрощена до максимума. Однако она дает достаточно хорошие результаты, особенно для больших напряжений. Для получения прямой линии на рис. 20 необходимо выбрать закон вида $v(\sigma) = B\sigma^n$.

Для малых напряжений и больших длительностей опытов мгновенная деформация является почти полностью упругой. Деформация ползучести велика, но не настолько, чтобы надо было учитывать изменения геометрии. Поэтому обычно предполагается $\sigma = \sigma_0$.

Доминирующим процессом здесь является повреждение, т. е. накопление межзеренных микротрещин вследствие диффузии вакансий из тела зерна к его границам. Это накопление повреждений характеризуется параметром ω (см. 3.1), означающим уменьшение эффективной площади сечения образца. Если F_0 есть начальная площадь, то эффективная будет $F = (1 - \omega)F_0$, а эффективное напряжение σ есть $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - \omega}$.

Предположим, что скорость трещинообразования есть функция эффективного напряжения, т. е.

$$\dot{\omega} = \varphi\left(\frac{\sigma_0}{1 - \omega}\right). \quad (13.5)$$

С другой стороны, можно считать, что скорость ползучести тоже есть функция эффективного напряжения

$$\dot{\rho} = \psi\left(\frac{\sigma_0}{1 - \omega}\right). \quad (13.6)$$

Разрушение произойдет, когда эффективное напряжение достигнет значения сопротивления разрушения или же когда ω достигнет некоторого критического значения, которое заключено между 0 и 1.

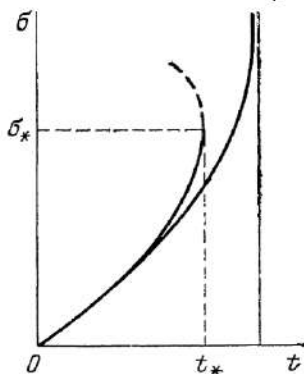


Рис. 21

С учетом разброса опытных данных невозможно получить точное значение этой критической точки, и просто предполагают, что в момент отрыва $\omega=1$. Выбирая функцию φ как $\varphi(x)=Cx^k$, можно проинтегрировать (13.5) способом разделения переменных. Интегрируя по ω от 0 до 1, получим оценку времени до разрушения

$$t_* = \frac{1}{c(1+k)\sigma_0^k},$$

которая соответствует участку 2 прямой в логарифмических координатах (см. рис. 20).

Промежуточная область может рассматриваться как сочетающая влияния растрескивания, значительной деформаций ползучести, а также геометрических изменений площади сечения, которыми уже нельзя пренебречь (см. ссылку [10]).

Выше не учитывался фактор упрочнения. Если же учесть его, то уравнение запишется:

$$\dot{p} = \psi(\sigma, p, \omega).$$

Ограничимся здесь частным случаем, а именно когда функции φ и ψ в уравнениях (13.5) и (13.6) одинаковы с точностью до постоянного множителя. Тогда

$$d\omega/dp = Cte,$$

или

$$\omega = p/e_*,$$

где e_* — деформация в момент разрушения. Тогда уравнение ползучести будет выглядеть как

$$\dot{p} = \psi(\sigma, p).$$

Форма его аналогична форме (12.4) с той разницей, что p во втором члене больше не является параметром упрочнения; это есть упрочнение на первой стадии и растрескивание на третьей.

§ 14. Сложное напряженное состояние

Одной из основных гипотез, лежащих в основе теории ползучести при сложном напряженном состоянии, является предположение о существовании потенциала скоростей деформаций. Это есть лишь гипотеза, и достаточно произвольная. Она не является законом природы и не следует ни из принципов термодинамики, ни из законов механики. В теории пластичности аналогичные гипотезы допускают,

вводя постулат Друккера. Однако сам М. Друккер подчеркивал, что этот постулат есть лишь принцип для классификации материалов, позволяющий разграничить «хорошие» и «плохие». Под «хорошими» принято понимать материалы, для которых выполняется принцип экстремума и для которых могут быть доказаны свойства взаимности, единственности решений и т. п.

Пусть S — однородная функция первого порядка от компонент σ_{ij} тензора напряжений. Шесть частных производных $\partial S / \partial \sigma_{ij}$ будут функциями нулевого порядка, зависящими лишь от пяти независимых переменных, что говорит о наличии некоторой связи между напряжениями. Запишем ее в виде

$$\omega(\partial S / \partial \sigma_{ij}) = 1,$$

где ω — однородная функция своих аргументов, имеющая первый порядок. Тогда можно определить «параметр упрочнения» как

$$p = \int \omega(\dot{p}_{ij}) dt \quad (14.1)$$

(интегрирование ведется вдоль пути нагружения в пространстве деформаций ползучести). Далее выбирается потенциал ползучести как функция $\Phi(p, S)$ и

$$\dot{p}_{ij} = v(p, S) \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (14.2)$$

где

$$v = S \frac{\partial \Phi}{\partial S}.$$

Как правило, p рассматривают как параметр, позволяющий описывать не только упрочнение, но и растрескивание. Тогда критерий разрушения можно записать в виде

$$p = e_*,$$

как и в случае одноосного нагружения. Относительно формы функции ψ существует много гипотез, однако мы не будем касаться этого.

В некоторых экспериментальных работах (например, О. В. Соснин¹⁾) предлагается брать в качестве меры повреждения величину работы, израсходованной в процессе ползучести. Эта работа дается интегралом в шестимерном

¹⁾ Соснин О. В. Установившаяся анизотропная ползучесть дисков // ПМТФ. — 1963. — № 4. — С. 128—131.

пространстве p_{ij}

$$q = \int \sigma_{ij} dp_{ij}. \quad (14.3)$$

Представляется целесообразным использовать тот же параметр q в качестве структурного параметра и ввести его в уравнения (14.2) вместо p . Мы лишь перепишем эти уравнения в слегка модифицированном виде, относя p_{ij} к (14.3). Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\dot{q} = v(q, S). \quad (14.4)$$

Материал начнет разрушаться при достижении q критического значения q_* , определяемого из опытов на растяжение.

Оба изложенных подхода кажутся допустимыми с точки зрения логики. Имеющиеся экспериментальные данные не позволяют отдать предпочтение тому или другому из них: разница в предсказываемых ими результатах слишком мала по сравнению с неопределенностью прочих возможных факторов. Следует указать на возможности практического использования этих подходов (с помощью ЭВМ): можно рассмотреть с позиций теории ползучести ряд важных технических проблем (цилиндрическая труба под действием внешнего и внутреннего давлений; диски и турбины, и т. п.). Это привлекло многих исследователей к данной теории.

Судить о соответствии опытных и теоретических данных достаточно сложно. Опытные результаты часто весьма неопределенны, зависят от причин второго порядка, например от сильной неустойчивости свойств материалов.

Укажем также на основной недостаток описанных выше теорий. При изучении под микроскопом куска металла, разрушившегося при растяжении, можно наблюдать группировку микротрещин вокруг межкристаллических плоскостей с направлениями, близкими к направлению плоскости, ортогональной к оси растяжения. Когда эти микротрещины сливаются в видимую глазом трещину, то и она, как правило, расположена в той же плоскости; т. е. другими словами, учет лишь одного скалярного параметра повреждения явно недостаточен для объяснения эффектов, связанных с ориентацией трещин.

§ 15. Техническая теория.

Изохронные кривые ползучести

Теория ползучести металлов при высоких температурах была построена лишь недавно, и ее основные результаты датируются последними сорока годами. Развитие ее было

вызвано в первую очередь нуждами практики. Диск паровой турбины был первым объектом, рассчитанным с хорошей точностью. Нетрудно понять, что увеличение толщины диска не может быть решением задачи повышения прочности: диск нагружен так называемыми центробежными силами, пропорциональными его толщине. С другой стороны, нельзя не учесть и ползучесть: эффективность турбины тем выше, чем выше температура пара. У газовых турбин область рабочих температур еще выше, и для обеспечения длительного срока службы авиационного турбореактивного двигателя необходимо тщательно выверить выбранную форму дисков турбин. В этих условиях теория ползучести становится даже более важной, чем теория пластичности.

С другой стороны, диски турбин представляют хорошую возможность проверки справедливости выбранной теории. Действительно, задача о вращающемся диске переменной толщины может быть рассмотрена и как задача одномерная, но все же не настолько простая, чтобы можно было воспользоваться уравнениями (14.2). Это и привело к созданию простых практических методов расчета, доступных инженеру-исследователю.

Отметим еще одну трудность, связанную с применением вышеизложенных методов. Мы приняли, что поведение материала определялось одним параметром. Но в реальных сплавах, находящихся под действием высоких температур и различных нагрузок, могут произойти и чисто металлургические изменения, например образоваться новые фазы.

Для учета различных особенностей поведения материала часто применяется метод, который мы и рассмотрим ниже. Заметим предварительно, что не имея строгого физического или механического обоснования, он, тем не менее, дает достаточно хорошие результаты. Этот метод предложен автором более 30 лет назад и до сих пор широко используется в СССР. В области практических применений этот метод изохронных кривых пока не имеет себе равных.

На рис. 22 представлено семейство кривых ползучести, каждая из которых соответствует определенному значению напряжения σ . Однако те же экспериментальные данные можно изобразить и другим образом, а именно на плоскости (ϵ, σ) различные кривые будут соответствовать различным моментам t_1, t_2, \dots времени. На рис. 23 изображены эти кривые, называемые изохронными. Результаты обработки опытных данных указывают на возможность определения

семейства изохронных кривых эмпирической формулой вида

$$\sigma = \frac{\varphi(e)}{1 + at^\beta}.$$

Равенство $\sigma = \varphi(e)$ есть уравнение кривой мгновенного деформирования. Необходимо получить ее вид (что само по себе достаточно сложно, см. § 20) и выбрать константы a и β , согласующиеся с экспериментом. После этого для расчета

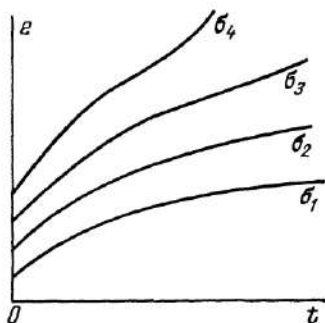


Рис. 22

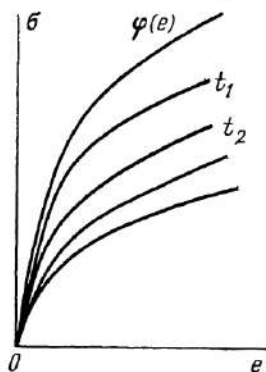


Рис. 23

напряженного и деформированного состояний, соответствующих некоторому моменту, следует взять кривую для этого момента t и интерпретировать ее как диаграмму напряжений — деформаций для пластического материала. Уравнения пластичности с упрочнением хорошо известны, их можно взять из литературы. Критерий разрушения (или, более точно, образования макротрещины) есть, согласно Джонсону [11], максимальное главное напряжение, которое сравнивается с величиной предела прочности, определяемой по диаграмме рис. 21 для рассматриваемого момента t . Таким образом, имеем

$$(\sigma_1)_{\max} = \sigma_* \quad (15.1)$$

Однако значение напряжения σ_1 не остается постоянным в процессе ползучести. Для описания этого изменения как функции времени необходимо выполнить расчеты для последовательных моментов времени, рассматривая кривые σ , соответствующие различным значениям t .

Приняв гипотезу линейной суперпозиции повреждений, мы получим вместо $(\sigma_1)_{\max}$ некоторое другое значение, которое и будет сравниваться с σ_* . Наши расчеты, однако, по-

казали, что для дисковых паровых и газовых турбин разница не превышает 2—3 %, и ею можно пренебречь. Однако есть и более серьезное возражение: критерий $(\sigma_1)_{\max}$ применим лишь при допущении больших ошибок.

В. П. Сдобырев [10] провел большую серию опытов на трубчатых образцах, подвергнутых одновременно осевому растяжению и кручению. Кроме этого, он изучил результаты опытов Джонсона [11]. В итоге Сдобырев предложил эмпирический критерий

$$[(1-\gamma)\sigma_1 + \gamma\sigma_t]_{\max} = \sigma_*, \quad \gamma \sim 0,5, \quad (15.2)$$

где σ_i есть интенсивность напряжений, т. е. (в главных осях)

$$2\sigma_i^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

В Московском научно-исследовательском институте ЦНИИТМАШ была организована программа важных испытаний вращающихся дисков в условиях высоких температур. В процессе опытов систематически определялось время до разрушения и на основе изохронных кривых и критерия (15.2) рассчитывалось напряжение. Разница между расчетными и опытными данными не превосходила 5 % и по напряжениям, что с инженерной точки зрения вполне приемлемо. Очевидно, что изохроны представляют реальные кривые ползучести, причем достаточно точно. С другой стороны, нельзя не признать, что этот метод остается чисто эмпирическим и не имеет теоретического обоснования.

§ 16. Разрушение при кратковременной ползучести

Будем называть кратковременной ползучестью такой процесс ползучести, где значительные деформации (порядка 2—3 %) достигаются за время не более десяти секунд [12]. Этот термин скорее характеризует область напряжений и температур, но не самих длительностей.

На рис. 24 представлены типичные кривые кратковременной ползучести. Они не имеют первого участка, а также высокотемпературного упрочнения. Третий этап, т. е. ускоряющаяся ползучесть, вызывается здесь, по-видимому, растрескиванием и геометрическими изменениями.

Предположим теперь, что мы имеем неоднородное напряженное состояние. Обозначив главные напряжения по их убыванию $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$ и предположив наличие существенной разницы между σ_1 и σ_2 , σ_3 , можно принять, что обра-

зование трещин происходит в основном в плоскостях, ортогональных направлению растяжения σ_1 . Тогда для эффективных напряжений

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 / (1 - \omega_1), \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_3,$$

откуда следует, что можно пренебречь ω_2 и ω_3 и обозначить ω_1 как ω .

Хорошо известно, что в процессе ползучести, когда скорость деформации сильно возрастает с увеличением напряжения, распределение напряжений очень схоже с состоянием предельного равновесия идеального пластического тела. Если принять закон ползучести вида $\dot{\epsilon} \cong \sigma^n$ (с точностью до константы), это будет нечто вроде предельного результата при $n \rightarrow \infty$. Это замечание часто с успехом используется в приближенных расчетах ползучести ги-

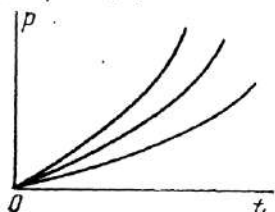


Рис. 24

перстатических систем [10].

Примем, что допустимо теми же методами рассмотреть задачи о концентрации напряжений при ползучести [13]. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим плоское деформированное состояние.

Условие ползучести, переписанное в форме условия квазипластичности, примет вид

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 = \frac{\sigma_1}{1 - \omega} - \sigma_s = \lambda \sigma_s, \quad (16.1)$$

где через σ_s обозначена произвольная константа, имеющая размерность напряжения (например, предел текучести), а λ — параметр, зависящий от времени и определяемый из уравнений равновесия. И в действительности, разница между задачами пластичности и ползучести состоит в том, что предел текучести, постоянный в рассматриваемой области, изменяется со временем так, что условие равновесия можно рассматривать как постоянно выполняющееся (квази-статическая задача).

Положим $\sigma_1 = \sigma + \tau$, $\sigma_2 = \sigma - \tau$. Уравнение (15.3) может быть записано в сокращенном виде как

$$\tau = m\sigma + b, \quad (16.2)$$

где

$$m = -\frac{\omega}{2 - \omega}, \quad b = \lambda \frac{1 - \omega}{2 - \omega} \sigma_s,$$

что формально совпадает с соотношениями статики грунтов. Полагая, как это принято,

$$\sigma_{xx} = \sigma - \tau \cos 2\theta, \quad \sigma_{yy} = \sigma + \tau \cos 2\theta, \quad \sigma_{xy} = \tau \sin 2\theta$$

и внося это в уравнения равновесия, мы приходим к системе квазилинейных гиперболических уравнений. Тогда уравнения характеристик будут

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2-\omega) \sin 2\theta \pm 2\sqrt{1-\omega}}{\omega + (2-\omega) \cos 2\theta}, \quad (16.3)$$

а соотношения вдоль характеристик

$$\pm \frac{\sqrt{1-\omega}}{2-\omega} \frac{\partial \sigma}{\partial s} + \tau \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\sigma + {}^{1/2} \lambda \sigma_s}{(2-\omega)^2} \frac{\partial \omega}{\partial n}, \quad (16.4)$$

где $\partial/\partial s$ означает производную вдоль характеристики, а $\partial/\partial n$ — производную по нормали к ней. Выбор положительного направления нормали производится, как на рис. 25.

Пусть ψ_1 есть угол наклона характеристики 1 ко второй главной оси, ψ_2 — то же для характеристики 2,

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -\sqrt{1-\omega}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \sqrt{1-\omega}. \quad (16.5)$$

В уравнениях (16.4) и (16.5) знак плюс соответствует характеристике 1, знак минус — характеристике 2.

Для описания развития процесса растрескивания можно начать со скорости повреждаемости $\dot{\omega}$, предположив, что она пропорциональна некоторой мощности приведенного напряжения σ_e , т. е.

$$\dot{\omega} = b\sigma_e^k.$$

В качестве σ_e можно выбрать σ_1 , или же значение из критерия Сдобырева (15.2), либо же, наконец, интенсивность напряжений σ_i . Расчеты по этим критериям показывают, что результаты оказываются достаточно близкими. Мы выберем последнюю из этих гипотез и запишем

$$\dot{\omega} = b\sigma_i^k \lambda^k(t). \quad (16.6)$$

§ 17. Концентрация напряжений

Уравнения предыдущего параграфа нашли применение при расчете времени до разрушения вращающегося диска, трубы под действием внутреннего давления и т. п. Но наи-

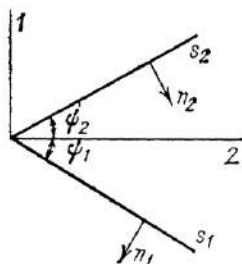


Рис. 25

более интересной областью приложений представляется исследование концентрации напряжений.

Рассмотрим образец прямоугольного сечения, ослабленный двумя полуцилиндрическими симметрично расположен-

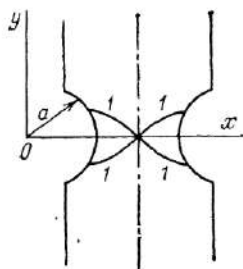


Рис. 26

ными круговыми надрезами, изображенный на рис. 26. В начале процесса деформирования находятся характеристики в виде логарифмических спиралей, и зона пластичности ограничена линиями типа 1. Вследствие симметрии поля напряжений достаточно исследовать деформированное состояние на оси $y=0$.

Удобнее записать наши уравнения в полярных координатах, расположив полюс в центре надреза. Положим

$$\sigma_r = \lambda \sigma_s (s-1), \quad \sigma_\theta = \lambda \sigma_s (1-\omega) s.$$

Тогда уравнение (16.1) будет выполняться автоматически, а уравнение равновесия примет в полярных координатах вид

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{1-\omega s}{\xi}, \quad \xi = \frac{x}{a}. \quad (17.1)$$

Уравнение повреждаемости запишется так:

$$\dot{\omega} = \lambda^k \psi(\sigma, \omega), \quad (17.2)$$

где ψ будет равно 1, если принять гипотезу (16.5), положив $b\sigma_s^k = 1$. Здесь σ_s взята из критерия Сдобырева, откуда

$$\psi(s) = \left[(1-\gamma)s + \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \right]^k.$$

Численное интегрирование здесь не представляет труда. Обозначив через τ момент появления первой макротрещины (здесь за единицу времени принято время разрушения образца без надреза), получим для $k=3$

$$\begin{aligned} \tau &= 1,024 \text{ при } \beta = 0; \\ \tau &= 1,25 \text{ при } \beta = 0,5. \end{aligned}$$

Последний результат хорошо согласуется с данными экспериментов на алюминиевых образцах. Выбор k делался на основе данных испытаний образцов без надреза, по методике, изложенной в § 13. Для этого необходимо измерить на-

клон участка 2 прямой на рис. 20. Очевидно, что значение k зависит в общем случае от материала и от температуры.

Влияние надреза на продолжительность срока службы образца является не столь уже существенным и на практике затушевывается разбросом результатов, полученных на различных образцах из одного и того же материала.

Угол $\psi_{1,2}$ в процессе ползучести уменьшается с ростом поврежденности (см. (16.5)), зона квази-пластичности становится все более и более узкой, и образование трещины происходит при совпадении характеристик обоих семейств, как это показано на рис. 27.

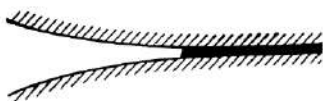


Рис. 27

Это уменьшение пластической зоны хорошо подтверждается опытами. Подтверждается также и слабое влияние концентрации напряжений на выносливость элементов конструкций. Можно сделать вывод, что в задачах кратковременной ползучести влиянием надрезов, отверстий и других концентраторов напряжений можно пренебречь, введя вместо них коэффициент запаса. (Разумеется, о пренебрежении концентрацией напряжений вообще здесь нет и речи.)

Принятая идея, легшая в основу вышеизложенного, может быть обобщена [13]. И действительно, пусть рассматривается тензор повреждений ω_{ij} и пусть $\psi_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Запишем

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ik} \psi_{jk} + \bar{\sigma}_{jk} \psi_{ik}), \quad (17.3)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$ есть тензор эффективных напряжений. Положим

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \epsilon_0 \partial \varphi / \partial \bar{\sigma}_{ij}, \\ \dot{\psi}_{ij} &= \partial \psi / \partial \bar{\sigma}_{ij}, \end{aligned} \quad (17.4)$$

что означает фактически совместное введение потенциала скоростей ползучести φ и потенциала скоростей повреждаемости ψ (зависящих от $\bar{\sigma}_{ij}$). Если тензоры ψ_{ij} и σ_{ij} имеют те же главные оси, то выполняется

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 / \psi_1, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 / \psi_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_3 / \psi_3.$$

Если же $\sigma_1 \gg \sigma_2, \sigma_3$, то, приравнявая ψ_2 и ψ_3 к 1, мы приходим к однопараметрической теории, изложенной выше.

Глава 4. ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ НАСЛЕДСТВЕННОСТЬ

§ 18. Наследственная упругость. Линейная теория

Перейдем теперь к рассмотрению совсем иного класса задач, имеющих совсем другие области приложений, однако приводящих также к изучению трещин и повреждений.

Выше мы занимались ползучестью металлов при высоких температурах. Деформацию ползучести мы отождествляли с деформацией пластической, хотя на деле это неверно. И действительно, при разгрузке предварительно растянутого образца деформация ползучести не остается все время постоянной, а убывает (пусть и понемногу) со временем. Кривая ползучести при нагружении и разгрузке имеет вид, как на рис. 28. После разгрузки упругая деформация σ/E

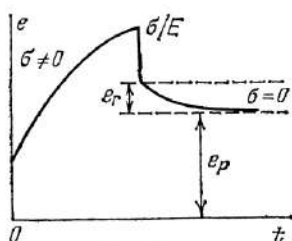


Рис. 28

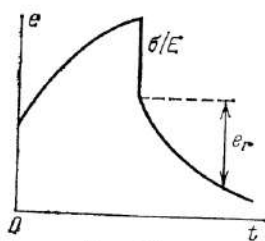


Рис. 29

мгновенно исчезнет, а остаточная деформация также не останется постоянной: часть ее аннулируется по закону, напоминающему закон ползучести. Этот эффект называется восстановлением ползучести. Величина e_r восстанавливаемой деформации значительно меньше самой перманентной деформации e_p , особенно при повышенных температурах. Теории ползучести, которые мы обсуждали выше, этот эффект игнорируют.

При осуществлении подобного же опыта на материале типа пластмассы, например высокополимерном, результаты будут иными. Как видно из рис. 29, деформация ползучести e_p почти полностью обратима. Поэтому ползучесть высокополимерных материалов должна рассматриваться не как процесс накопления пластических деформаций, а как явление запаздывающей упругости. В современ-

ной литературе этот класс явлений называют вязко-упругостью. Но предпочтительней является термин, введенный Вито Вольтерра: наследственная упругость.

В рамках линейной теории определяющее соотношение наследственной теории запишется в виде

$$e = (1 + \lambda K) \sigma, \quad (18.1)$$

где K есть оператор Вольтерра, определяемый как

$$(K\sigma)(t) = \int_{-\infty}^t K_1'(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau.$$

Если из (18.1) определять σ , то в момент t :

$$\sigma = \frac{1}{1 + \lambda K} e = (1 - R(\lambda)) e,$$

где $R(\lambda)$ есть резольвентный оператор, соответствующий λK .

Раскладывая выражение $1/(1 + \lambda K)$ в формальный ряд (аналогично разложению $1/(1+x)$ при $|x| < 1$; проблема сходимости требует специального изучения), получим ряд Неймана для резольвенты уравнения Вольтерра.

Для уточнения возможностей оперирования с ядром K была построена алгебра операторов, используемых в теории Вольтерра.

Отметим важное тождество [14]

$$K(x)K(y) = \frac{K(x) - K(y)}{x - y} \quad (18.2)$$

(с особенностью при $x=y$). Оно используется при решении всех уравнений вида

$$(1 + \mu R(\lambda)) u = v.$$

Можно сказать, что любой такой оператор K порождает семейство операторов $R(\lambda)$, зависящих от одного параметра λ .

В приложениях уравнение Вольтерра тесно связано с оператором Абеля (назовем его J_α), определяемым как

$$(J_\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^\alpha f(\tau) d\tau$$

(где Γ есть гамма-функция Эйлера). Назовем такие операторы экспоненциальными операторами с индексом α

и запишем

$$\varepsilon_{\alpha}(\beta) = \frac{J_{\alpha}}{1 - \beta J_{\alpha}}. \quad (18.3)$$

Мы берем α из области $\alpha \in]-1, 0[$, что как раз соответствует практическим случаям. Ядро этого оператора имеет слабую особенность (характеризуемую как t^{α} при $t \rightarrow 0$) и $(\varepsilon_{\alpha}(\beta)1)(t)$ стремится к $-1/\beta$ при $t \rightarrow \infty$ (если выполняется $\beta < 0$).

В этих условиях можно воспользоваться принципом соответствия, сформулированным Вольтерра. Он состоит в том, что для решения любой задачи наследственной упругости следует решить прежде всего аналогичную задачу классической упругости. В решении будут содержаться различные комбинации упругих постоянных, причем в виде рациональных выражений. Тогда, если операторы, описывающие свойства материала, принадлежат к указанному классу операторов $R(\lambda)$, то можно использовать (18.2) для расшифровки результата, заменив в нем упругие постоянные на операторы. Ситуация слегка осложняется, если упругие константы входят в решение не в алгебраическом виде. Следует отметить, что применение к интегральному уравнению Вольтерра преобразования Лапласа приводит к тем же результатам.

§ 19. Задача о росте трещины

Принцип Вольтерра, изложенный в предыдущем параграфе, применим в общем случае лишь к задачам, где тип краевых условий считается неизменным. К примеру, с помощью этого принципа не удастся решить задачу о движущемся штампе, где перемещение точки границы известно лишь в тот короткий период, когда штамп находится вблизи нее. Можно, однако, указать и случаи, где принцип действует: среди прочих задача Герца, или же задача о движении трещин.

Запишем основные уравнения плоской задачи в виде

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \varphi', \quad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(z\bar{\varphi}'' + \psi'), \\ 2\bar{\mu}(u + iv) = (3 - 4\nu)\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}.$$

Черточки над μ и ν означают, что упругие константы заменены здесь операторами вида $\bar{\mu} = \mu(1 + K)$ и т. п. Положив

$$\psi = \varphi - z\varphi',$$

получим на прямой $y=0$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = 2 \operatorname{Re} \varphi', \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \frac{\bar{\mu}}{2(1-\bar{\nu})} v = \operatorname{Im} \varphi. \quad (19.1)$$

Таким образом, методика решения плоской задачи наследственной упругости не отличается от методики решения классической упругой задачи. Здесь длина трещины $c(t)$ предполагалась функцией времени. Распределение напряжений остается таким же, как в уже изученных случаях (см. § 8).

В работах ряда советских физиков указывалось на возможность появления ультрамикроскопических трещин в тонких пленках некоторых полимерных материалов. Методы, основанные на измерении дисперсии рентгеновских лучей, позволили оценить величину длины этих микротрещин, которая оказалась лежащей в пределах от 100 до 1000 Å ($1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ м}$). При нагружении материала концентрация этих трещин со временем увеличивается, и при достижении концентрацией величины приблизительно 10^{16} микротрещин на см^3 появляется макротрещина. Распространяется эта видимая глазу трещина достаточно быстро, что приводит к разрушению образца. Этот механизм разрушения отличается от описанного нами в гл. 2.

В линейной механике разрушения предполагается, что материал остается упругим и неповрежденным повсюду, кроме небольшой зоны вблизи кончика трещины. Предположим теперь, напротив, что процесс растрескивания, заключающийся в образовании микротрещин, происходит во всем теле, содержащем трещину. Скорость движения управляется условием достижения на кончике трещины критического значения плотности микротрещины π . Что касается процесса образования микротрещин, то предположим, что скорость их накопления есть функция первого инварианта напряжений, т. е.

$$\dot{\pi} = f(h\sigma_1).$$

Ограничимся здесь случаем, когда эта функция линейна. Всегда можно определить критическое значение π_* такое, что это уравнение примет вид

$$\dot{\pi} = \sigma_1 = \operatorname{tr} \sigma_{ij}. \quad (19.2)$$

Разумеется, можно оперировать и нелинейной функцией $f(\sigma_1)$, но тогда решение можно получить лишь с помощью численных методов. Поэтому выбор здесь уравнения (19.2) продиктован лишь желанием получить замкнутое решение.

Приведем известный результат для плоского напряженного состояния при $y=0$, $|x|>a$:

$$\sigma_I = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{2\sigma_\infty}{3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Трещина, представленная на рис. 30, имеет в момент τ длину $2a(\tau)$, а в текущий момент t — длину $2a(t)$. Значение

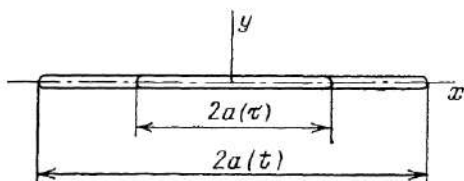


Рис. 30

σ_I в момент τ для точки с абсциссой $a(t)$ будет согласно (19.2)

$$\sigma_I = \frac{2\sigma_\infty}{3} \frac{a(t)}{\sqrt{(a(t))^2 - (a(\tau))^2}}, \quad (19.3)$$

Внесем (19.3) в (19.2) и проинтегрируем. Полагая $(a(t))^2 = z$, $(a(\tau))^2 = \xi$, придем к уравнению Абеля

$$\int_{z_0}^z \frac{\sigma_\infty(\tau) \tau'(\xi)}{\sqrt{z - \xi}} d\xi = \frac{3}{2} \frac{\pi_*}{\sqrt{z}},$$

решение которого будет

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{\cos(\pi \sigma_\infty t / 3\pi_*)} \quad (19.4)$$

для $\sigma_\infty = C^{te}$.

§ 20. Нелинейная наследственность

Поведение большинства полимеров является нелинейным, и напряжения в общем случае не будут достаточно малыми. Следуя идее Фреше, Вольтерра предложил записать уравнение состояния в виде

$$\begin{aligned} e(t) = & \int_{-\infty}^t J_1(t - \tau_1) d\sigma_{-1} + \\ & + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_2(t - \tau_1, t - \tau_2) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2) + \dots \end{aligned} \quad (20.1)$$

(интегралы Стильтеса). Эта идея была забыта на протяжении полувека, и лишь в 60-х годах ею стали пользоваться для интерпретации опытных данных. Одной из первых публикаций в этом направлении явилась работа [15], где соотношение (20.1) использовалось для описания ползучести полипропилена. Немного позднее Финдли с сотрудниками начал публикацию серии исследований по данной теме [16].

Отметим, что во всех этих работах рассматривались материалы, поведение которых не слишком отличалось от линейного. Приняв, что закон ползучести при растяжении и сжатии один и тот же, авторы удерживали в формальном ряде (20.1) лишь два члена и описывали поведение материала с помощью двух ядер $J_1(x)$, $J_3(x, y, z)$.

Обратная формула, выражающая σ как функционал от ϵ , имеет структуру, аналогичную (20.1), однако с расчетной точки зрения она не столь удобна.

В принципе испытания на ползучесть при постоянной нагрузке позволяют построить оба ядра J_1 и J_3 . Однако вследствие вида матрицы системы линейных уравнений, из которых определяются J_1 и J_3 , результаты часто оказываются неустойчивыми [17].

С другой стороны, точное описание ползучести с помощью трех ядер часто невозможно, если деформации не являются малыми: кривая мгновенного деформирования не может быть удовлетворительно описана полиномом третьей степени. Если же увеличивать число членов в разложении (20.1), расчетные трудности резко возрастают. Вот почему мы рассмотрим здесь упрощенную теорию, основанную на гипотезе, что все ядра (20.1) имеют одну структуру, т. е.

$$J_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) = a_k \prod_{m=1}^k J_0(t - \tau_m). \quad (20.2)$$

Положим теперь

$$s(t) = \int_{-\infty}^t J_0(t - \tau) d\sigma(\tau) = (1 + K) \sigma \quad (20.3)$$

и перепишем (20.1) в виде

$$\epsilon = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots \quad (20.4)$$

Формальный ряд (20.4) определяет ϵ как функцию s . Предположив возможности ее обращения, запишем

$$s = \varphi(\epsilon)$$

или

$$\varphi(\epsilon) = (1 + K) \sigma, \quad (20.5)$$

т. е. основное уравнение теории нелинейной наследственности.

Обобщение на неодномерный случай не представляет труда. Вводятся модифицированные напряжения

$$s_{ij} = (1 + K) \sigma_{ij}$$

и предполагается существование потенциала U как функции e_{ij} такого, что

$$s_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}. \quad (20.6)$$

Для линейной наследственности в случае изотропного тела получим

$$e_{11} = \frac{1+K}{E} [\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})],$$

где коэффициент Пуассона есть просто постоянный множитель, а не оператор. Это допущение часто используется в линейной теории из-за трудностей экспериментального определения данных для построения оператора $\bar{\nu} = \nu(1+N)$.

В случае нелинейной теории мы не располагаем достаточным числом экспериментальных данных, чтобы подтвердить или опровергнуть гипотезу (20.6).

Вернемся вновь к одномерному случаю. Пусть $\sigma = C^{\text{те}}$ в уравнении (20.5).

Тогда

$$\sigma = \frac{\varphi(e)}{1 + K1}, \quad (20.7)$$

где $K1$ есть хорошо известная функция времени. Уравнение (20.7) описывает семейство изохронных кривых ползучести, которые подобны друг другу. На это подобие уже указывалось в § 15. Уравнение $\sigma = \varphi(e)$ определяет мгновенную кривую «напряжения — деформации», кривую, которую в действительности получить невозможно, так как скорость деформации есть всегда величина конечная. Мы будем рассматривать эту кривую как некую идеальную, воображаемую. Это можно сделать, выбрав определенным образом форму ядра оператора K , к примеру $K = kJ_{\infty}$.

На рис. 31 представлены кривые ползучести пластического материала, армированного стекловолокнами (сплошные линии). Линии 1, 2, 3 соответствуют значениям растягивающего напряжения в 8,1, 12,2 и 14,2 Н/мм². Ядро оператора K выбрано в виде

$$K = k\varepsilon_{-\alpha}(\beta).$$

В работе [18] найдены значения параметров ядра $\alpha=0,8$, $\beta=-0,32$, $k=0,26$. За кривую $\sigma=\varphi(e)$ можно принять кривую 1 на рис. 32. Кривые ползучести, рассчитанные по значениям параметров, изображены на рис. 31 штрихпунктирными линиями.

Суворова и Осокин [19] воспользовались в своем исследовании более точными методами. После обработки данных

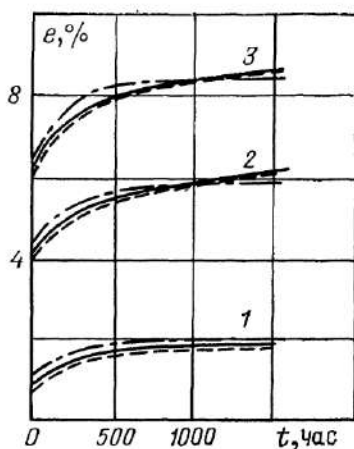


Рис. 31

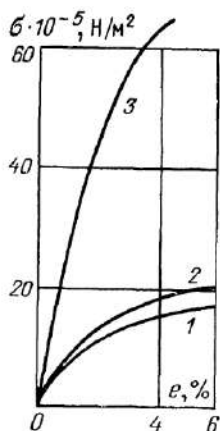


Рис. 32

на ЭВМ и минимизации отклонений методом наименьших квадратов они получили значения

$$\alpha=0,885, \quad \beta=-0,112, \quad k=0,116.$$

Расчетные кривые ползучести проведены штриховыми линиями на рис. 31. Видно, что они практически совпадают с экспериментальными.

В [19] ядро оператора наследственности было выбрано максимально простым: $K=kJ_{-\alpha}$, что соответствует $\beta=0$. Соответствие с экспериментальными данными оказалось очень хорошим. В масштабе рис. 31 различить их друг от друга практически нельзя. В этом случае обозначенная цифрой 3 на рис. 32 кривая $\sigma=\varphi(e)$ отличается от кривой 1: кривая 3 расположена значительно выше. Это характеризует «идеальность» мгновенной кривой деформирования: она всегда получается в результате предельного перехода от экспериментальных данных, что, разумеется, несет элемент неопределенности и произвола.

С другой стороны, эти результаты показывают, что для хорошего описания опытных данных необходимо опреде-

лить значения лишь двух констант, а не трех. Так, выбрав произвольно $\alpha=0,8$, мы затем определили β и k . Суворова и Осокин положили $\beta=0$ и затем нашли α и k . Соответствие между теорией и экспериментом было, тем не менее, хорошим.

Глава 5. МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

§ 21. Композиты волокнистого строения

Давно известно, что прочность тонких волокон или нитей из различных материалов значительно выше, чем прочность объемных образцов из тех же материалов. Так, прочность стеклянных нитей превосходит прочность конструкционной стали. Как использовать это явление на практике? Это стало возможным лишь недавно, когда химики создали целый ряд синтетических материалов, называемых высокополимерными соединениями, и когда началось их промышленное производство. Так, взяв стеклоткань и пропитав ее пластической смолой, находящейся в стадии полимеризации, мы получим прочную и легкую пластину или оболочку, вполне пригодную для использования в качестве элемента конструкции.

Скрещивание волокон стеклоткани вызывает концентрацию (локальную) напряжений, что ведет к разрушению полимерной матрицы. Потенциальная прочность стекловолокон арматуры, таким образом, используется не полностью. Лучшие результаты дает наложение последовательных слоев выравненных волокон. Так, для оболочки вращения стеклянные нити сматываются с катушки так, что каждая из них находится под натяжением.

Прочность стеклотекстолитовых композитов, изготовленных таким образом, выше прочности алюминиевых сплавов и имеет тот же порядок, что и прочность сталей.

Основным дефектом армированных стеклопластиков является их низкая жесткость. Так, модуль упругости их имеет порядок 30000 Н/мм^2 (у обычных сталей — 200000 Н/мм^2). Это и объясняет трудности, возникающие при сооружении конструкций, состоящих как из металлических элементов, так и из пластиков, армированных стекловолокнами. Сравнительно недавно были получены волокнистые материалы, обладающие как высокой прочностью, так и достаточно большим модулем упругости.

1. *Угольные волокна.* В результате карбонизации полиакрилонитрильных волокон, находящихся под напряжением, получают углеродные нити с упорядоченными атомными плоскостями. Высокая прочность и повышенное значение модуля Юнга этих волокон объясняется их фибриллярной структурой: каждая фибрилла образуется из пучка атомных плоскостей, и прочность в первую очередь определяется чрезвычайно крепкими ковалентными связями.

2. *Борные волокна.* При высоких температурах происходит осаждение бора из его хлоридов на вольфрамовую проволоку. Кристаллическая решетка бора имеет очень сложную структуру и в принципе не допускает возможности пластических скольжений. Высокая прочность на разрыв и особенно на сжатие обусловлены ковалентными связями. Отметим, что борное волокно является поликристаллом.

Приведем значения прочности на растяжение σ_b и модуля упругости E (измеренных в 10 Н/мм^2), а также диаметров \varnothing (в мм) волокон углерода и бора:

	σ_b	E	\varnothing
углерод	180 — 300	25 000 — 40 000	0,01
бор	250 — 400	35 000 — 60 000	0,1 — 0,2

Здесь существенны в основном лишь порядки величин: в различных странах продукция различных предприятий часто сильно отличается друг от друга.

Если объемное содержание волокон в композите составляет 50 %, то прочность и модуль упругости его будут как у хорошей стали, а объемная плотность — в четыре раза меньше, чем у стали. Вот почему подобные материалы впервые были применены именно в авиации.

Помимо полимерных смол, в качестве матриц композитов используются и другие материалы. Так, известны композиты из алюминия, армированного волокнами бора, из титана, армированного углеродными волокнами (например, с целью приспособления к работе в условиях высоких температур), и т. п.

§ 22. Слоистые упругие композиты

Современная технология изготовления пластин, оболочек, дисков, турбин и т. п. есть технология препрега. Этот англоязычный термин, ставший международным, означает

тонкий слой волокон или лент из параллельных волокон, пропитываемый полимерной смолой. Несколько листов с различными ориентациями волокон накладываются друг на друга и затем полимеризуются под давлением. Это позволяет получать материал с требуемой степенью анизотропии.

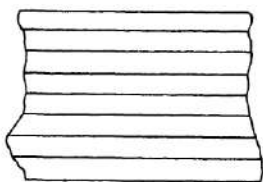


Рис. 33

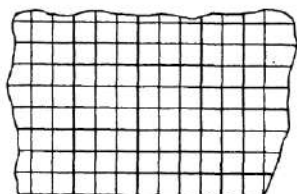


Рис. 34

Наиболее традиционные виды структур изображены на рис. 33—35.

1. *Однонаправленное армирование.* Прочность в направлении укладки волокон велика; в ортогональном же направлении это есть прочность полимерной матрицы, т. е. величина относительно небольшая. Основной недостаток — это расслоения вдоль направления армирования.

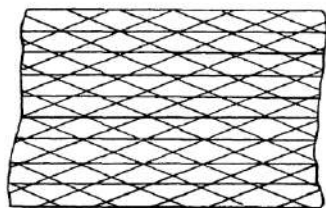


Рис. 35

2. *Ортогональное армирование.* Оно особенно выгодно в случае, когда главные оси тензора напряжений известны и не меняются в процессе деформирования. Тогда волокна следует располагать именно указанным образом.

3. *Симметричное армирование в трех направлениях* ($0, \pm\varphi$). Этот случай наиболее часто встречается в приложении. Отметим, что даже при отсутствии матрицы эта тройная решетка является практически недеформируемой и величины напряжений могут быть найдены из уравнений статики. Добавляя четвертый слой, можно получить армирование в четырех направлениях ($0, \pm\varphi, \pi/2$): система станет уже статически неопределимой, что не всегда желательно.

Если подвергнуть однонаправленный композит (или монослой слоистого композита) испытанию на растяжение или на сдвиг, то можно видеть, что композит с полимерной матрицей остается упругим вплоть до момента разрушения.

Введя триоды \vec{s} и \vec{e} как

$$\sigma_{11} = s_1, \dots, \sigma_{12} = s_3, \quad e_{11} = e_1, \dots, e_{12} = e_3$$

и определяя матрицу жесткостей C с компонентами C_{ij} , получим

$$\vec{s} = C\vec{e}.$$

Что касается прочности этого монослоя, мы примем, что разрушение его может произойти частично из-за разрыва волокон, частично из-за скалывания матрицы. В первом случае (см. рис. 33) имеем

$$\sigma_{n1} = \sigma_b, \quad (22.1)$$

где σ_b есть предел прочности на растяжение. С другой стороны, скалывание матрицы вдоль направления армирования определяется величиной некоторой комбинации нормальных и сдвиговых напряжений, которая с достаточной точностью аппроксимируется линейной функцией

$$\sigma_{n2} + m\tau_n = k. \quad (22.2)$$

Теперь расчет слоистой структуры не представляет труда. Обозначим через \vec{s}_k , \vec{e}_k , c_k напряжение, деформацию и жесткость слоя с номером k (система координат — одна для всех слоев). Если пластина или оболочка находятся в условиях плоского напряженного состояния, то деформации всех слоев будут одинаковы, откуда следует, что среднее напряжение есть (C — матрица упругих постоянных композита в целом)

$$\vec{s} = C\vec{e}.$$

Напряжения σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

(F_i — компоненты объемной плотности внешних сил). Напряжения, раздельно действующие в каждом из слоев, могут быть найдены по формулам

$$\vec{s}_k = R\vec{s}, \quad \text{где } R = c^k C^{-1}. \quad (22.3)$$

Каждый бесконечно малый элемент любого слоя подвержен действию сдвиговых усилий, что ведет к взаимодействию между соседними слоями. Обозначив через τ^k вектор сдвиговых усилий, действующих между слоями k и $k+1$,

можно с помощью рис. 36 получить

$$\sigma_{ij, j}^k + F_i^k + (\tau_i^k - \tau_i^{k-1})/h^k = 0 \quad (22.4)$$

(h^k — толщина слоя k , ось 1 соответствует направлению волокон, ось 2 ортогональна ей). С помощью (22.4) рассчитываются сдвиговые усилия, которые могут иногда быть

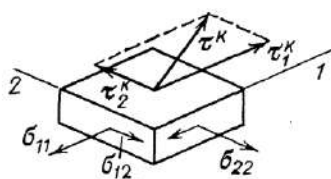


Рис. 36

достаточно большими и опасными для работы композита.

Для примера рассмотрим компоненты матрицы жесткостей для монослоя углерод — смола. Обозначив индексом 1 направление волокон и положив $C_{11}=100$; $C_{22}=5,4$; $C_{12}=1,6$; $C_{33}=2,5$, можно увидеть, что остальные C_{ij}

пренебрежимо малы по сравнению с C_{11} . И действительно, жесткостью матрицы часто пренебрегают, учитывая лишь жесткость углеродных волокон.

Видно, что для любых осей координат

$$C_{ijkl} = E v_f v_i v_j v_k v_l, \quad (22.5)$$

где E — модуль Юнга волокон, v_f — объемная доля волокон в композите, v_i — составляющие вектора \mathbf{n}_1 вдоль выбранных осей. В случае армирования $(0, \pm\varphi)$ получаются достаточно простые конечные формулы [20].



Рис. 37

З а м е ч а н и е. Если рассчитывается напряжение σ_φ в

волокне, составляющем угол φ с осью 1, то получается, что значение σ_φ оказывается непостоянным по длине волокна, производная $d\sigma_\varphi/dl$ (l — абсцисса длины волокна) будет отлична от нуля. На рис. 37 видно, что это изменение напряжения уравнивается напряжениями сдвига τ , откуда следует, что

$$\tau = \frac{r}{2v_f} \frac{d\sigma_\varphi}{dl}. \quad (22.6)$$

Значения $d\sigma_\varphi/dl$ могут быть значительными вблизи концентраторов напряжений, например вблизи отверстий. Для волокон больших диаметров значение τ особенно велико. Например, положив $\tau \leq 50$ Н/мм² и $\sigma \leq 2500$ Н/мм² для волокна бора, можно заключить, что допустимое значение τ будет превышать вблизи отверстий с диаметром, большим 1 см.

В этом случае у края отверстий будет происходить разрушение путем выдергивания волокон из матрицы (для углеродных волокон такой опасности не существует).

§ 23. Предельное состояние пластической композитной структуры

Предположим теперь, что как волокна, так и матрица могут деформироваться пластически и могут достигать состояния полной текучести [21]. Мы будем рассматривать достаточно общий случай, когда структура S порядка m образована из m субструктур, имеющих некоторые общие элементы. Деформация элементов, одновременно принадлежащих ко многим субструктурам, будет, очевидно, всюду одинаковой (параллельное соединение структур). Вектор Q внутренних усилий в структуре S есть сумма внутренних векторов различных субструктур:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m,$$

где каждый Q_i принадлежит некоторому векторному конечномерному пространству V (не обязательно одному и тому же для всех).

Предположим, что все субструктуры имеют по крайней мере по несколько общих элементов. Тогда, говоря об объединении субструктур S_j , мы можем назвать это объединение S композитом [21]. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости тоже могут являться примерами таких композитов.

Рассмотрим подкрепленную ортогональной системой стержней пластину. Напряженное состояние в ней всегда представлено тремя компонентами усилий и тремя компонентами моментов. Что касается подкрепляющей решетки, то принимается, что система ортогональных стержней не препятствует сопротивлению тела ни сдвигу, ни кручению: соответствующая подсистема будет тогда иметь размерность 4 (два усилия и два момента). Аналогичным образом можно рассмотреть пластинки, армированные волокнами.

Предположим, что S состоит из двух частей S_1 и S_2 . Тогда

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

В случае достижения каждой из подсистем предельного состояния будут выполняться два символических равенства

$$\Phi_1(Q_1) = k^2, \quad \Phi_2(Q_2) = k^2,$$

которые можно переписать в слегка модифицированном

виде

$$\Phi_1(Q - Q_2) = k^2, \quad \Phi_2(Q_2) = k^2. \quad (23.1)$$

Первое уравнение определяет в пространстве V семейство гиперповерхностей, зависящих от векторного параметра Q_2 , который в свою очередь определяется из второго соотношения (23.1). Беря производную по t , получим

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q} \dot{Q}_2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial Q_2} \dot{Q}_2 = 0.$$

Откуда, вследствие произвольности \dot{Q}_2 , следует

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q} = p \frac{\partial \Phi_2}{\partial Q_2}. \quad (23.2)$$

Уравнение предельной гипер-поверхности получится, если исключить вектор Q_2 и параметр p (который можно рассматривать как множитель Лагранжа) из уравнений (23.1) и (23.2). Легко видеть, что поверхность предельного состояния, определенная для всей системы, есть $\Phi(Q) = k^2$ и представляет собой не что иное, как огибающую поверхностей, определяемых уравнением $\Phi_1(Q - Q_2) = k^2$, когда они перемещаются таким образом, чтобы выполнялось второе из соотношений (23.1).

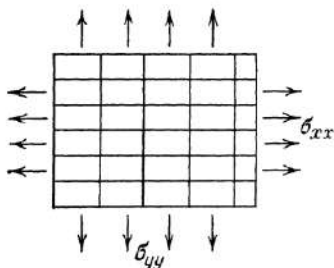


Рис. 38

Примеры.

1. Рассмотрим прямоугольную пластину из материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса — Генки и подкрепленную в двух направлениях параллельно краям. Пластина подвержена действию растягивающих напряжений σ_{xx}

и σ_{yy} (рис. 38). Так как мы имеем лишь две компоненты напряжения, то пространство V имеет размерность 2.

Предельные состояния для стержневой ортогональной решетки представлены в виде прямоугольника (см. рис. 39, а), тогда как для самой пластины это есть эллипс (см. рис. 39, б). В итоге получается контур, описывающий область предельных состояний подкрепленной таким образом системы. Синтез эллипса Мизеса и прямоугольника приводит к фигуре, изображенной на рис. 39, в.

2. Рассмотрим ту же пластинку под действием сдвигового усилия τ_{xy} . В этом случае предельная поверхность будет расположена в трехмерном пространстве (так как

существуют компоненты σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy}). Эллипсоид Мизеса имеет вид

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 = k^2$$

и перемещается в процессе деформирования таким образом, что его центр всегда находится внутри прямоугольника, лежащего в плоскости $\sigma_{xy}=0$ (см. рис. 40).

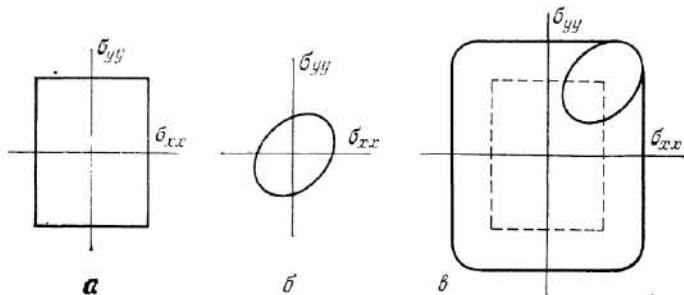


Рис. 39

3. Рассмотрим тройную стержневую решетку. Для каждого волокна в трехмерном пространстве есть лишь один отрезок, в общем случае наклонный, который соответствует

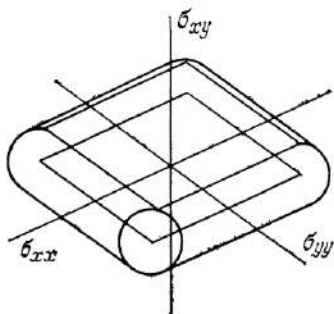


Рис. 40

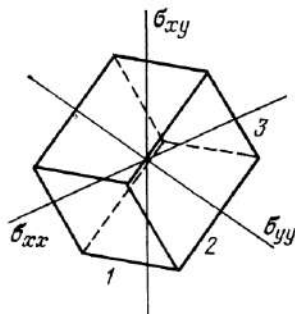


Рис. 41

допустимым состояниям. Концы этого отрезка определяются значениями прочности на растяжение и на сжатие. Для волокна, ориентированного в другом направлении, получится другой такой отрезок. Перемещая один из отрезков по отношению к другим, мы получим в итоге параллелограмм (рис. 41). В итоге для такой триплетной решетки область допустимых состояний оказывается расположенной внутри соответствующего параллелепипеда.

§ 24. Прочность слоистых композитов

Полученные в предыдущем параграфе результаты справедливы лишь для конструкций из двух компонентов, причем каждый из них деформируется пластически и без упрочнения. Для композитов углерод-эпоксидная смола и бор-эпоксидная смола лучшие результаты дает теория § 22. Однако идеи, там представленные, могут иметь и более широкое применение.

Для определения прочности композита необходимо точно знать условия разрушения каждого из слоев в отдельности, причем как в изолированном друг от друга состоянии, так и в композите. Число направлений армирования, т. е. монослоев, уложенных в различных направлениях, невелико: от 2 до 4, не более. Вот почему возникает необходимость вывода наиболее простого и удобного практически критерия, основанного на данных испытаний самих композитных образцов, а не только на свойствах изолированных слоев, либо же искусственного материала, однонаправленно армированного.

Если отсутствует межслойное разрушение, то дефекты возникают в плоскости волокон. Для материала с тремя направлениями армирования необходимо исследовать лишь

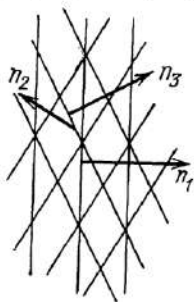


Рис. 42

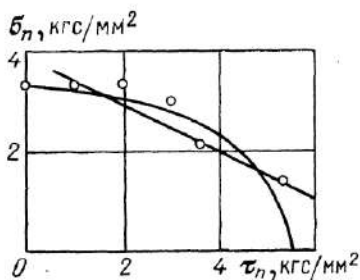


Рис. 43

три направления, определенные как n_1 , n_2 , n_3 (см. рис. 42). Для каждого из этих направлений условия разрушения запишутся как

$$\sigma_n + m\tau_n = k, \quad (24.1)$$

или же

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_n}{\tau_*}\right)^2 = 1. \quad (24.2)$$

Сделать выбор между линейным и квадратичным критериями на самом деле не так просто. Так, на рис. 43 показано

несколько экспериментальных точек (σ_n , τ_n) для наиболее простого случая композита с однонаправленным армированием. Видно, что расстояния от этих точек до эллиптической кривой и до прямой примерно одинаковы.

На рис. 44 проведена теоретическая кривая зависимости между пределом прочности σ и углом θ , составляемым

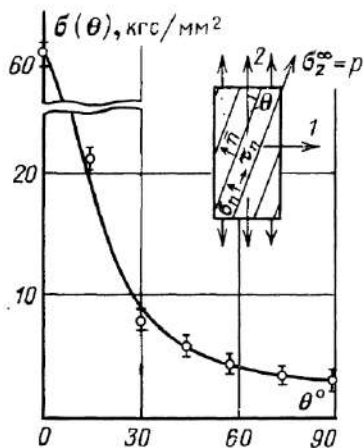


Рис. 44

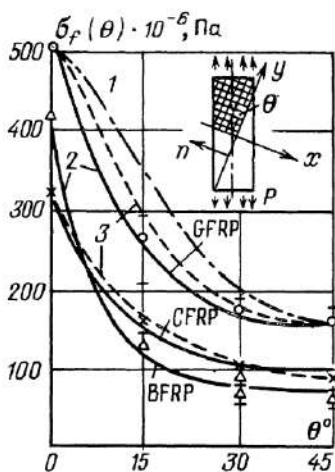


Рис. 45

направлением нагрузки с осью волокон. Эта теоретическая кривая была рассчитана по квадратичной формуле (24.2) [22].

Некоторыми авторами были предложены так называемые инвариантные формулы

$$(B_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta = 1. \quad (24.3)$$

В случае плоского напряженного состояния B_{ij} и A_{ijkl} имеют уже 9 компонент. Гольденблатт и Копнов полагали $\alpha=1$ и $\beta=1/2$, тогда как Цай и Ву предпочли положить $\alpha=\beta=1$. Очевидно, что число характеристических констант материала слишком велико, чтобы их надежно определить. На рис. 45 представлены экспериментальные данные по трем материалам, армированным стеклянными (GFRP), борными (BFRP) и углеродными (CFRP) волокнами в двух ортогональных направлениях. Кривая 1 построена по уравнению (24.3), а кривые 2 и 3 соответствуют соотношениям (24.1) и (24.2). Здесь линейный, более простой критерий оказался в лучшем соответствии с опытными данными.

Если материал усилен двойной решеткой волокон и растягивающая сила действует вдоль биссектрисы, то механизм разрушения оказывается другим: волокна стремятся выравняться, чему мешает межслойная прочность. Прочность легко определить, предположив, что на межслойной поверхности равномерно приложены пары сил. Пусть M есть поверхностная плотность пары, и рассмотрим элементарный параллелограмм со стороной c (рис. 46). Видно, что длина l есть $l=2c \cos \varphi$, откуда следует, что

$$\Delta l = 2c (\sin \varphi) \Delta \varphi.$$

Растягивающая сила имеет величину $2\sigma c \sin \varphi$. Работу этой силы предположим равной работе пар M , распределенных по параллелограмму площадью $2c^2 \sin \varphi \cos \varphi$, подвергнутому угловому перемещению $\Delta \varphi$. В итоге

$$\sigma = \mu \operatorname{ctg} \varphi, \quad \mu = M/c. \quad (24.4)$$

Для очень малых углов φ значение σ , получаемое из (24.4), оказывается достаточно большим, и в действие вступает механизм прямого разрыва волокон. Обозначив через σ_{f*} предел прочности однонаправленно армированного материала, получим

$$\sigma = \sigma_{f*} / \cos \varphi. \quad (24.5)$$

Кривые, соответствующие уравнениям (24.4) и (24.5), показаны на рис. 47. Точка их пересечения соответствует значению $\varphi = \varphi_{f*}$, что составляет примерно $4-5^\circ$. Видно, что для углов $\varphi > \varphi_{f*}$ конструкция с двойным армированием невыгодна: прочность будет слишком мала, если направ-

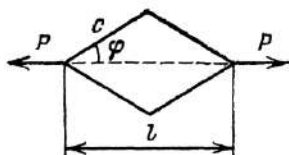


Рис. 46

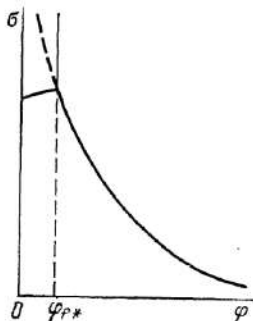


Рис. 47

ление армирования не будет совпадать с направлениями главных осей тензора напряжений. Напротив, если угол не превышает 5° , то опасности нет. Сравнение с однонаправленно армированными материалами оказывается не в пользу последних: вероятность предельного отслаивания достаточ-

но велика. Двойное армирование при достаточно малых углах есть лучшая гарантия против распространения трещин вдоль направления волокон.

§ 25. Концентрация напряжений в композитах

Простой вид критерия (24.1) делает возможным решение ряда задач о концентрации напряжений. Заметим, что использование, к примеру, критерия (24.3) связано с большими расчетными трудностями.

Выберем в качестве примера задачу о большой перекрестно армированной пластине, растягиваемой вдоль одного из направлений армирования и содержащей круговое отверстие (см. рис. 48) [22]. Область вокруг отверстия предполагается достаточно большой по сравнению с характерным структурным размером (расстоянием между волокнами). Таким образом, материал в принципе можно рассматривать как однородный, и мы можем ограничиться изучением макронапряжений. Легко видеть, что напряжения σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} достигают максимальных значений на границе отверстия [22].

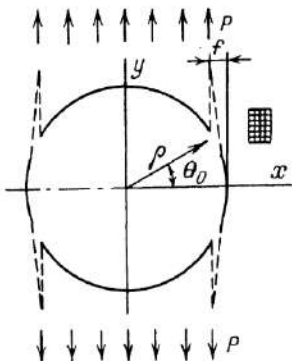


Рис. 48

Их можно выразить через одну компоненту, а именно σ_θ . Соответствующее аналитическое решение для анизотропной плиты хорошо известно. Для плоскости, параллельной оси y , используется условие разрушения (24.1), после чего производится минимизация значения предела прочности по отношению к углу θ . В итоге получается выражение для определения той точки границы, с которой начинается процесс разрушения.

Результат оказывается в форме алгебраического уравнения относительно $\cos^2\theta$, которое легко решается. Искомая точка зависит и от упругих свойств материала. Так, найдем $\theta_0 \sim 20^\circ \pm 5^\circ$. В качестве примера для некоторых видов полимеров, армированных стекловолокнами (50 %), получено, что $\theta_0 = 24^\circ$. Величина растягивающего напряжения в момент начала разрушения была в 3,5 раза меньше, чем для образца без отверстия.

Начало разрушения в точке (из-за симметрии в четырех точках) не означает, разумеется, потери несущей способности образца. Это локальное повреждение ведет к пере-

распределению напряжений, как если бы уменьшилась глубина концентратора. (Можно представить себе, что образец заменен двумя отдельными образцами с боковыми надрезами глубиной f и радиусом кривизны ρ (см. рис. 48).) Нормальное напряжение в точке $\theta=0$, характеризующее некоторым образом прочность образца, уменьшается. На этой первой стадии процесса разрушения продольные трещины образуются в точках $\pm\theta_0$, $\pi\pm\theta_0$. Эти трещины еще не опасны, и их появление вызывает даже разгрузку в точках $\theta=0$, π , где нормальная компонента напряжений максимальна.

Для вычисления значения коэффициента концентрации напряжений в этом (последнем) случае рассматривают полуэллиптическое отверстие, или, следуя терминологии Нейбера, неглубокий вырез. Результаты в обоих случаях почти совпадают. Радиус кривизны остается неизменным, а глубина f легко вычисляется через угол θ_0 . Для используемых на практике композитов эффективный коэффициент концентрации напряжений (т. е. частное от деления разрушающей нагрузки для образца с отверстием на разрушающую нагрузку для образца той же площади, но без отверстия) находится в достаточно узких пределах: между 1,45 и 1,55. Результаты опытов вполне подтверждают теоретические выводы, если радиус кривизны отверстия достаточно велик, а глубина f значительно превышает расстояние между волокнами (напомним, что для однородного анизотропного материала коэффициент концентрации напряжений обычно значительно больше, чем для изотропного, где он равен 3).

Для однонаправленно армированных пластиков, однако, все наоборот — образование в т. $\theta=0$ трещины ведет к разрушению, так как трещина может продвинуться на очень большое расстояние — например, следуя вдоль волокон.

Для материалов, армированных в направлении действия растягивающей нагрузки и имеющих боковой вырез (см. рис. 49), основную роль играют сдвиговые напряжения. Поэтому в формуле (24.1) членом σ_n можно пренебречь.

Согласно гипотезе Нейбера концентрация напряжений для неглубокого выреза не зависит от формы выреза, а зависит лишь от соотношения между глубиной выреза f и радиусом кривизны ρ . Мы пользовались этой гипотезой при рассмотрении задачи о концентрации напряжений сдвига. Был определен коэффициент концентрации для гиперболического бесконечно глубокого выреза, а также для выреза неглубокого. Пусть k_1 и k_2 есть известные величины. Согласно формуле Нейбера эффективный коэффициент

концентрации напряжений будет

$$k = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}. \quad (25.1)$$

Мы проводили испытания стекло-эпоксидных образцов с надрезами, имеющими радиус кривизны ρ в 0,3 мм. На

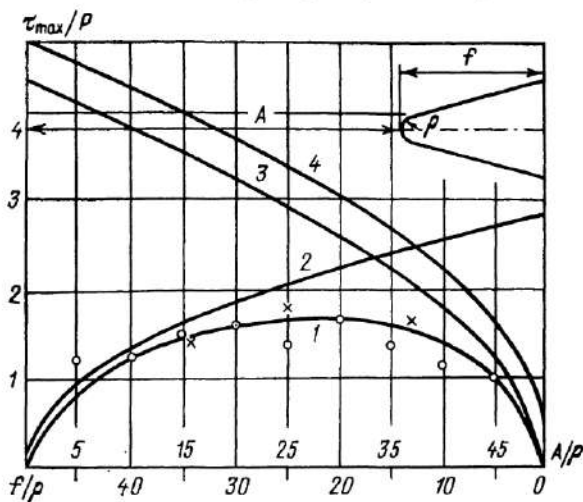


Рис. 49

рис. 49 маленькими кружками и крестиками обозначены экспериментальные данные, а 1 — теоретическая кривая, соответствующая формуле (25.1). Кривая, соответствующая k_1 , обозначена цифрой 2. Коэффициент k_2 вычислялся по двум различным методикам: соответствующие кривые обозначены цифрами 3 и 4.

§ 26. Прочность композитных материалов

Вернемся на короткое время к § 7 и 8. Трещиностойкость (вязкость разрушения) материала, измеряемая величинами G_c или K_{Ic} , есть важная величина, характеризующая способность материала сопротивляться распространению ранее существовавшей в нем трещины. Однако в любом металлическом изделии достаточно больших размеров имеется много подобных трещин.

С другой стороны, прочность на разрыв бездефектного образца σ_b есть не менее важная характеристика: именно с нее начинается расчет элементов конструкций, не содер-

жащих трещин или же имеющих очень мелкие трещины. Это справедливо и при использовании методов линейной и нелинейной механики разрушения.

Разумеется, конструктору желательно иметь в распоряжении материал с высокой прочностью и большой сопротивляемостью разрушению. К сожалению, на сегодняшний

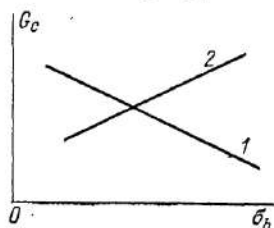


Рис. 50

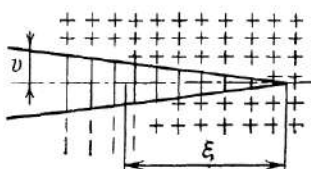


Рис. 51

день это невозможно. Вязкость разрушения в первую очередь зависит от пластических свойств материала, однако пластичность, т. е. удлинение в момент разрушения, убывает с возрастанием величины прочности.

Изобразив графически зависимость между значениями G_c и σ_b , можно получить для металлов нечто вроде линии,

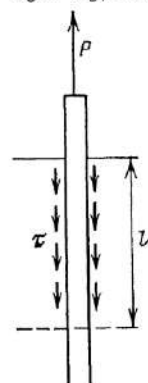


Рис. 52

обозначенной на рис. 50 цифрой 1. Для композитов же ситуация иная: с увеличением прочности сопротивление распространению трещины также растет (линия 2 на рис. 50).

Это нетрудно понять. В хрупкой матрице трещина распространяется беспрепятственно; в качестве первого приближения сопротивлением матрицы пренебрежем. Но волокна арматуры разрываются лишь на некотором расстоянии ξ от кончика трещины и мешают относительным перемещениям v ее краев (рис. 51). Для увеличения сопротивления волокон используются различные методы. Мне думается, что наиболее корректным и в то же время простым будет предположение о том, что силы трения $\tau = C^{\text{те}}$ на единицу площади поверхности препятствуют вытягиванию волокон из материала.

Пусть P есть сила, приложенная на краю волокна, заключенного в матрицу (рис. 52). Эта сила уравнивается сдвиговыми усилиями, действующими на отрезке длиной l . Уравнение равновесия есть

$$P = 2\pi l r \rightarrow l = \frac{P}{2\pi r \tau}.$$

Тогда удлинение элемента волокна длиной l будет (в направлении оси y)

$$v = \frac{1}{2} \frac{Pl}{E_f \pi r^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{P^2}{\tau E_f r^3}.$$

Если σ есть среднее напряжение композита, то

$$P = \frac{\pi r^2 \sigma}{v_f},$$

где v_f есть объемная плотность содержания волокон в материале. Обращаясь к предыдущему соотношению, можно видеть, что связь между напряжением в зоне вокруг кончика трещины и относительным перемещением ее границ будет

$$v = \frac{1}{4} \frac{\sigma^2}{E \tau v_f} = \alpha \sigma^2. \quad (26.2)$$

Положим теперь $\sigma = \xi^n$ (где ξ — расстояние до кончика трещины), $v = \alpha \xi^{2n}$ и вычислим интеграл Райса — Черепанова. Получим

$$G_c = \int \sigma \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi = \frac{2}{3} \alpha \xi^{3n} = \frac{1}{6} \frac{1}{E \tau} \frac{\sigma^3}{v_f}.$$

Предполагается, что движение трещины начинается при достижении величиной σ_f значения прочности на разрыв волокон. Положив $\sigma = \sigma_f v_f$, получим

$$G_c = \frac{1}{6E\tau} \sigma_f^3 v_f^2. \quad (26.3)$$

Из (26.3) следует, что сопротивление распространению трещины возрастает вместе с прочностью волокна и объемной плотностью содержания арматуры в материале. Однако это не говорит о наличии простого произведения, линейного по каждому из факторов. С другой стороны, сила сцепления τ , равная сопротивлению матрицы сдвигу, не должна быть слишком велика.

Эта теория применима лишь к ортогонально армированным материалам, содержащим трещины, распространяющиеся вдоль направлений армирования. В противном случае ситуация существенно осложняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данного изложения не было описание точных теорий, содержащих хорошо известные и выверенные уравнения. В этих классических теориях требуется лишь проинтегрировать уравнения, и механическая задача сводится к задаче чисто математической, где можно пользоваться наиболее изящными методами, привлекать в полной мере функциональный анализ, теорию распределений и т. п. Что касается основ, т. е. законов баланса и уравнений состояния, то они предполагаются раз навсегда принятыми. В классических теориях уравнения состояния берутся насколько можно более простыми: несжимаемость и закон Паскаля для идеальной жидкости, закон Гука для линейной упругой среды. (Например, в нелинейной упругости разве много есть задач, решенных в элементарном, замкнутом виде?) На этой относительно примитивной основе можно построить огромные здания гидродинамики и теории упругости.

Содержание этой работы касается в основном явлений малоизученных, где фрагменты достаточно грубой информации соседствуют с эмпирическими и полуэмпирическими схемами.

На практике в технике основная часть явлений не может быть объяснена с помощью классических моделей. Возникают новые конструкционные материалы, свойства которых не могут быть описаны с помощью лишь уравнений линейной упругости и даже нелинейной. Многие случаи непредвиденного разрушения не укладываются в рамки классических теорий. Экспериментальные данные в основном скудны. Что до физических теорий, они позволяют механику удовлетворить свое любопытство, но малопригодны для построения уравнений состояния. Эти законы и теории в основном базируются все же на феноменологических концепциях.

Мы же, механики, всегда находимся в сложном положении. С одной стороны, наша теория не должна быть слишком уж упрощенной, она должна отражать основные характеристики явления, пренебрегая вторичными. С другой сто-

роны, уравнения не должны быть слишком сложными, чтобы можно было их интегрировать и проводить с ними расчеты.

Эти уравнения не содержат параметры и функции, которые из эксперимента определить невозможно. Записывая уравнения, необходимо представить себе возможности определения на практике входящих в них неизвестных параметров. Необходимо учитывать, что реализуемые экспериментальные программы всегда ограничены. Разумеется, можно выбрать столько параметров и функций, чтобы с любой точностью описать любые экспериментальные данные. Этот путь наиболее простой, но не лучший: уравнения должны иметь и механический смысл, должны следовать из некоторых разумных принципов.

Мне думается, что для рассмотрения задач разрушения твердых тел, для понимания механики поведения композитных материалов и для высказывания полезных с практической точки зрения рекомендаций необходимо объединить усилия физиков, инженеров, специалистов по классической механике, а также математиков.

Я надеюсь, что современные математические методы, уже проникшие в область классической механики сплошной среды, могут найти обширное применение при постановке и решении новых задач, столь важных для развития техники сегодняшнего дня.

Ю. Н. Работнов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids// Phil. Trans. Roy. Soc.— 1920.— Ser. A, V. 221.— P. 163—198.
2. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes.— Paris: Gauthier — Villars, 1913.
3. Coleman B. D. Thermodynamics of materials with memory// Arch. Ration. Mech. Anal.— 1964.— V. 17.— № 1.
4. Noll W., Truesdell C. Encyclopedia of Physics.— Springer, 1965.— V. III/3.
5. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости.— М.: Наука, 1970.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
7. Разрушение, т. 2.— М.: Мир, 1975.
8. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле//Прикладная механика.— 1959.— Т. 5, № 4.
9. Bu i H. D. Mécanique de la rupture fragile.— Paris: Masson, 1978.
10. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
11. Johnson A. E., Henderson J., Khan B. Complex stress creep, relaxation and fracture of metallic alloys.— Edinburg: H. M. Stationary Office, NEL, 1962.
12. Работнов Ю. Н., Милейко С. Т. Кратковременная ползучесть.— М.: Наука, 1970.
13. Работнов Ю. Н. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность//Изв. АН СССР, МТТ.— 1967.— № 3.
14. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука, 1977.
15. Ward I. M., Opat E. T. Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene//J. Mech. and Phys. of Solids.— 1963.— V. 11, № 4.
16. Findley W. N., Onaran K. Product form of kernel functions for nonlinear viscoelasticity of PVC under constant rate stressing// Trans. of the Soc. of Rheology.— 1968.— V. 12, № 2.
17. G r a d o w c z y k M. H. On the accuracy of the Green—Rivlin representation for viscoelastic materials//Int. Journ. Solids Struct.— 1969.— V. 5, № 8.
18. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанчев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных матрицах//Механика полимеров.— 1971.— № 1.

19. Осокин А. Е., Суворова Ю. В. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров//ПММ.— 1978.— Т. 42, № 6.
20. Работнов Ю. Н. Прочность слоистых композитов//Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 1.
21. Работнов Ю. Н. Упругопластическое состояние композитной структуры//Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды.— М.: Наука, 1969.— С. 411—415.
22. Полилов А. Н. Критерий разрушения поверхности раздела в однонаправленных композитах//Изв. АН СССР. МТТ.— 1978.— № 2.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Ю. Н. РАБОТНОВА

К вопросу определения упругости шелка // Шелк.— 1938.— № 6.— С. 22—26.

Напряжения во вращающемся диске, снабженном диаметрально ребром // ПММ.— 1939.— Т. 3, вып. 1.— С. 67—74.

Основные уравнения теории оболочек // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 47, № 2.— С. 90—93.

Уравнение пограничной зоны в теории оболочек // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 47, № 5.— С. 334—336.

Локальная устойчивость оболочек.— Докл. АН СССР.— 1946.— Т. 52, № 2.— С. 111—112.

Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой // Докл. АН СССР.— 1946.— Т. 52, № 4.— С. 299—301.

Некоторые решения безмоментной теории оболочек // ПММ.— 1946.— Т. 10, № 5.— С. 639—646.

Дифференциальные уравнения в частных производных // Машиностроение: Энциклопедический справочник. Разд. 1. Инженерные расчеты в машиностроении. Т. 1. Кн. 1.— М.: Машгиз, 1947.— С. 242—251.

Равновесие упругой среды с последствием // ПММ.— 1948.— Т. 12.— 1948.— Вып. 1.— С. 53—62.

Расчет деталей машин на ползучесть // Изв. АН СССР, ОТН.— 1948.— № 6.— С. 789—800.

Некоторые вопросы теории ползучести // Вестн. МГУ.— 1948.— № 10.— С. 81—91.

О диске равного сопротивления.— ПММ.— 1948.— Т. 12, вып. 4.— С. 463—464.

Теории ползучести и применение их к расчету деталей // Проблемы прочности при высоких температурах.— М.— Л.: Машгиз, 1950.— С. 45—47.

О работах И. А. Одингa в области ползучести и релаксации // ПММ.— 1950.— Т. 14, вып. 2.— С. 218—224.

Сопротивление материалов.— М.: Изд-во МГУ, 1950.— 336 с.
Пластинки и оболочки // Механика в СССР за 30 лет.— М.— Л.: Гостехиздат, 1950.— С. 226—239.

Приближенная техническая теория упругопластических оболочек // ПММ.— 1951.— Т. 15, вып. 2.— С. 167—174.

О равновесии сжатых стержней за пределом пропорциональности // Инж. сб.— 1952.— Т. 11.— С. 123—126.

Напряжения и деформации при циклическом нагружении // ПММ.— 1952.— Т. 16, вып. 1.— С. 121—122.

Деформация // Большая Советская энциклопедия. Т. 14.— М.: Советская энциклопедия, 1952.— С. 183—185.

Механико-математический факультет // Вестн. высш. школы.— 1952.— № 4.— С. 15—18.

Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести // Инж. сб.— 1952.— Т. 17.— С. 163—170. (Совм. с А. М. Жуковым и Ф. С. Чуриковым.)

Ползучесть и релаксация стали при высокой температуре // Тез. докл. на совещ. по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1954.— С. 51.

Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении // Инж. сб.— 1954.— Т. 18.— С. 105—112. (Совм. с А. М. Жуковым.)

О возможном механизме разрушения металла в коррозионной среде // Изв. АН СССР.— 1954.— № 6.— С. 53—56.

Малые пластические деформации как проблема механики // Изв. АН СССР. ОТН.— 1954.— № 7.— С. 97—104.

Ползучесть и релаксация хромолибденовой стали // Изв. АН СССР. ОТН.— 1955.— № 5.— С. 102—108. (Совм. с В. И. Даниловской и Г. М. Ивановой.)

Общие формулы деформаций поперечного изгиба балок // Тр. Моск. вец. машиностр. ин-та. Вып. 2.— М.: МВМИ, 1955.— С. 247—254.

The effect of changing loads during creep // Creep and fracture of metals at high temperature.— L.: Her Majesty's Stationary Office.— 1956.— P. 221—225.

Certains problemes de fluage // Actes 9^e Congr. Internat. Appl. Méc. V. 8.— Bruxelles: Univ. de Bruxelles, 1957.— P. 288—292.

О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов // Изв. АН СССР. ОТН.— 1957.— № 5.— С. 30—41.

Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ.— 1957.— Т. 21, вып. 3.— С. 406—412. (Совм. с С. А. Шестериковым.)

Creep stability of columns and plates // J. Mech. and Phys. Solids.— 1957.— V. 6, № 1.— P. 27—34. (Совм. с С. А. Шестериковым.)

Отделение технических наук к 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции // Изв. АН СССР. ОТН.— 1957.— № 11.— С. 5—9. (Совм. с А. А. Благовровым.)

Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела // ПММ.— 1959.— Т. 23, вып. 1.— С. 164—169.

О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.— С. 5—7.

О прочности дисков в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1959.— № 4.— С. 93—100. (Совм. с В. П. Рабиновичем.)

Упругопластическое состояние вращающегося диска при наличии упрочнения // Там же.— 1959.— № 5.— С. 154—156.

Приспособление для испытания материалов при сложнапряженном состоянии // Заводск. лаборатория.— 1960.— Т. 26, № 3.— С. 374—375. (Совм. с Б. П. Соколовым.)

The theory of creep and its applications // Plasticity. Oxford etc.: Pergamon Press.— 1960.— P. 338—346.

Pełzanie metali i obliczanie pełzania // Rozpr. inz.— 1960.— V. 8, No. 3.— P. 347—394.

Моделирование ползучести // ПМТФ.— 1961.— № 2.— С. 89—95.

О гипотезе уравнивания состояния при ползучести // ПМТФ.— 1961.— № 3.— С. 101—102. (Совм. с В. С. Наместниковым.)

О наследственных теориях ползучести // ПМТФ.— 1961.— № 4.— С. 149—150. (Совм. с В. С. Наместниковым.)

Установка для испытаний пластмасс на ползучесть и релаксацию // Заводск. лаборатория.— 1962.— Т. 28, № 4.— С. 498—501. (Совм. с Л. В. Баевым, Н. И. Малининым и И. А. Шубиным.)

Хладостойкость машин и металлоконструкций // Вестн. АН СССР.—1963.— № 1.— С. 53—55.

Сопротивление материалов.— М.: Физматгиз, 1963.— 455 с.

Механика твердого тела и пути ее развития // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 2.— С. 3—10.

Ползучесть // Тр. Всес. съезда по теор. и прикл. механике.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1962.— С. 384—395.

Динамическая прочность строительных материалов при средних скоростях деформации // ПМТФ.— 1962.— № 1.— С. 118—130. (Совм. с А. П. Бронским, В. Д. Ключниковым, Р. И. Мазингом и С. А. Шестериковым.)

La mécanique des corps solides et ses voies de développement // Schweiz. techn. Z.— 1962.— В. 59, Н. 51.— S. 1012—1016.

О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ.— 1963.— № 2.— С. 113—123.

Динамика жесткопластической системы перекрестных связей // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1963.— № 2.— С. 51—57. (Совм. с Г. А. Ивановым и Ю. В. Немировским.)

Программная машина для исследований деформаций пластмасс в условиях сложнапряженного состояния // Там же.— 1963.— № 6.— С. 20—24. (Совм. с Н. С. Даниловым, П. Л. Куприенко, Н. И. Малининым и И. А. Шубиным.)

Предельное равновесие подкрепленных цилиндрических оболочек // Там же.— 1963.— № 3.— С. 83—94. (Совм. с Ю. В. Немировским.)

On the equations of state for creep // Progress in Applied Mechanics. The Prager Anniversary volume.— N. Y.: The MacMillan Co.— P. 307—315.

Неклассические задачи теории оболочек // Вестн. АН СССР.— 1964.— № 1.— С. 59—62.

Кратковременная ползучесть // Справочные данные по краткой временной ползучести конструктивных материалов при высоких температурах. Вып. 2.— Новосибирск: Изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1964.— С. 49. (Совм. с С. Т. Милейко и В. И. Теленковым.)

Осесимметричные задачи ползучести круговых цилиндрических оболочек // ПММ.— 1964.— Т. 28, вып. 6.— С. 1040—1047.

Limit analysis of ribbed plates and shells // Bull. Acad. Polon. sci. Ser. sci. tech.— 1964.— V. 12, No. 11a.— P. 58—59.

Ползучесть металлов // Аннот. докл. II Всес. съезда по теор. и прикл. механике.— М.: Наука.— С. 179.

Опытные данные по ползучести технических сплавов и феноменологические теории ползучести // ПМТФ.— 1965.— № 1.— С. 141—159.

В научно-техническом совете по хладостойкости при Сибирском отделении АН СССР // Проблемы Севера. Вып. 9.— М.: Наука, 1964.— С. 268—270.

Экспериментальное выявление пластических зон на моделях из титанового сплава // Изв. АН СССР. Механика.— 1964.— № 2.— С. 108—109. (Совм. с О. Ф. Станкевичем.)

Механика твердых тел и полимерных материалов // Вестн. АН СССР.— 1964.— № 7.— С. 33—38.

Creep of shells // Appl. Mech. Proc. of the 11th Internat. Congr. of Appl. Mech.— Berlin: Springer.— 1964.— S. 415—419.

Некоторые результаты экспериментального исследования кратковременной ползучести при одноосном растяжении // ПМТФ.— 1966.— № 5.— С. 148—160. (Совм. с С. Т. Милейко.)

О вариационном уравнении установившейся ползучести оболочек // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 168, № 2.— С. 300—303.

Неустановившаяся ползучесть при степенном законе упрочнения // Инж. ж. МТТ.— 1966.— № 3.— С. 66—71.

Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.— 752 с.

Неустановившаяся ползучесть оболочек // Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин.— М.: Наука, 1964.— С. 646—649.

Машина на сложное нагружение с автоматическим программированием напряженного состояния // Инж. ж. МТТ.— 1966.— № 6.— С. 161—162. (Совм. с Б. Д. Анниным и Н. С. Данилиным.)

Как рождается ученый // Вестн. высш. школы.— 1977.— № 11.— С. 49—50.

Влияние концентраций напряжений на длительную прочность // Инж. ж. МТТ.— 1967.— № 3.— С. 36—41.

Изучение кинетики процесса разрушения стеклопластмасс // Машиноведение.— 1967.— № 1.— С. 98—101. (Совм. с В. М. Синайским и Е. И. Степанычевым.)

Лекции по теории упругости.— М.: Изд-во МГУ, 1967.— 155 с.

Описание упругопластических анизотропных свойств стеклопластиков // Аннот. докл. III Всес. съезда по теор. и прикл. механике.— М.: Наука, 1968.— С. 252. (Совм. с Е. И. Степанычевым.)

Описание упругопластических анизотропных свойств стеклопластиков // Инж. ж. МТТ.— 1968.— № 1.— С. 63—73. (Совм. с Е. И. Степанычевым.)

Модель упругопластической среды с запаздыванием текучести: К исследованию металлов // ПМТФ.— 1968.— № 3.— С. 45—54.

Динамика жесткопластической балки с запаздыванием текучести // Инж. ж. МТТ.— 1968.— № 6.— С. 78—86. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Kinetics of creep and creep rupture // Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids.— Wien — N. Y.: Springer, 1968.— P. 326—334.

Распространение упругопластических волн в стержнях и балках с учетом запаздывания текучести // Тез. докл. IV Всес. симп. по распростран. упругих и упругопластич. волн.— Кишинев: АН МолдССР.— 1968.— С. 78—79. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Упругопластическое состояние композитной структуры // Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды.— М.: Наука, 1969.— С. 411—415.

Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее.— М.: Наука, 1969.— 132 с. (Совм. с Л. Х. Паперником и Е. Н. Звоновым.)

На Второй международной конференции по разрушению // Probl. прочности.— 1969.— № 5.— С. 111—115. (Совм. с В. С. Ивановой.)

Creep problems in structural members.— Amsterdam: North-Holland.— 1969.— 822 p.

Creep rupture // Proc. of the 12th Internat. Congr. of Appl. Mech.— Berlin etc.: Springer.— 1969.— P. 342—349.

Кратковременная ползучесть.— М.: Наука, 1970.— 222 с. (Совм. с С. Т. Милейко.)

О разрушении твердых тел // Проблемы механики твердого деформируемого тела.— Л.: Судостроение, 1970.— С. 353—357.

Распространение упругопластических волн в стержнях и балках с учетом запаздывания текучести // Волны в неупругих средах.— Кишинев: АН МолдССР, 1970.— С. 193—198. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Methoden der Viskoelastizitätstheorie.— München: C. Hauser, 1970; Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1970. (Совм. с А. А. Ильюшиным.)

Запаздывание текучести в динамике жесткопластических сред // ПММ.— 1971.— Т. 35, вып. 1.— С. 20—30. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Dynamic problems for elastic-plastic solids with delayed yielding // Internat. J. Solids and Structures.— 1971.— V. 7, No. 2.— P. 143—159.

Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров.— 1971.— № 1.— С. 74—87. (Совм. с Л. Х. Паперником и Е. И. Степанычевым.)

Установка для изучения ползучести и длительной прочности стеклопластмасс // Машиноведение.— 1971.— № 2.— С. 75—77. (Совм. с И. М. Махмутовым, К. И. Петровым и Е. И. Степанычевым.)

Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС 8/3-250 // Механика полимеров.— 1971.— № 3.— С. 391—397. (Совм. с Л. Х. Паперником и Е. И. Степанычевым.)

О связи характеристик ползучести стеклопластиков с кривой мгновенного деформирования // Механика полимеров.— 1971.— № 4.— С. 624—628. (Совм. с Л. Х. Паперником и Е. И. Степанычевым.)

Creep rupture under stress concentration // Advances in creep desing. The A. E. Johnson Memorial Volume.— N. Y.: Wiley, 1971.— P. 3—19.

Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // ПМТФ.— 1971.— № 2.— С. 76—82. (Совм. с Н. Н. Дергуновым и Л. Х. Паперником.)

Распространение продольных упругопластических волн в малоуглеродистых сталях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1972.— № 2.— С. 180—184. (Совм. с Е. В. Ломакиным, В. Г. Лютцау и А. Ф. Мельшаиновым.)

Теория ползучести // Механика СССР за 50 лет. Т. 3.— М.: Наука, 1972.— С. 119—154.

О законе деформирования металлов при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.— 1972.— № 4.— С. 41—54. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Оценка склонности к хрупкому разрушению роторов турбин из сталей средней прочности // Проблемы прочности.— 1972.— № 4.— С. 3—9. (Совм. с Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелевым, Г. Н. Мериновым и Ю. П. Рыбаваловым.)

Redistribution of reactions at transient power-law creep // Greep in Structures. IUTAM Sympos.— Berlin, etc.: Springer, 1972.— P. 153.

Распределение импульса нагрузки в нелинейно-наследственном материале // Кибернетическая диагностика механических систем по виброакустическим процессам.— Каунас: Изд. Каунас. политехн. ин-та, 1972.— С. 47—48. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Изгиб тонкой пластинки с учетом физической нелинейности материала // Машиноведение.— 1973.— № 3.— С. 63—66. (Совм. с В. А. Руденко.)

О методических особенностях испытаний армированных полимеров на ползучесть // Заводск. лаборатория.— 1973.— Т. 39, № 11.— С. 1374—1379. (Совм. с Е. И. Степанычевым.)

Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии // Механика полимеров.— 1973.— № 5.— С. 779—785. (Совм. с Л. Х. Паперником и Е. И. Степанычевым.)

The influence of carbon fibre whiskerization on the physical and mechanical properties of CFRP // Carbon Fibres: Place in Mod. Technol.— London, 1974.— P. 65—70.

Влияние вискеризации углеродных волокон на физико-механические свойства композиций на их основе // Тез. докл. III Всес. конф.

по композиционным материалам.— М.: Изд. Ин-та металлургии АН СССР, 1974.— С. 121—122. (Совм. с В. Г. Лютцау, Г. М. Гуняевым, Т. Г. Соринной, Е. И. Степанычевым и Е. М. Фадюковым.)

Estimation of turbine rotor tendency to brittle fracture // Dritte Internat. Tagung über den Bruch. V. 9. Paper VIII-522.— München, 1974.— 22 p. (Совм. с Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелевым, Г. Н. Мариновым и Ю. П. Рыбоваловым.)

Дискуссия по теме «Разрушение металлов» на XIII Междунар. конгр. по теор. и прикл. механике // Проблемы прочности.— 1974.— № 1.— С. 108—109.

Проблемы разрушения материалов: Обзор докладов мюнхенской конференции по разрушению. Механика // Период. сб. перев. иностр. статей, № 5.— С. 79—94. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Оптимальное армирование // Тез. докл. III Всес. конф. по композиционным материалам.— М.: Изд. Ин-та металлургии АН СССР, 1974.— С. 13. (Совм. с С. Т. Милейко.)

К оценке прочности деталей с дефектами // Конструкционная прочность двигателей. Тез. докл. III Всес. научн.-техн. конф.— Куйбышев: Изд. Куйбышев. авиац. ин-та, 1974.— С. 40—42. (Совм. с А. И. Федосовым, В. П. Рабиновичем и А. А. Гензе.)

Об одном способе предотвращения трещин при термообработке толстостенных оболочек из стеклопластика // Механика полимеров.— 1975.— № 6.— С. 1095—1098. (Совм. с В. С. Екельчиком.)

Zur Abschätzung der Sprödbbruchsicherheit von Turbinenwellen // Arch. Eisenhüttenw.— 1975.— Jg. 46, No. 5.— S. 341—346. (Совм. с Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелевым, Г. Н. Мариновым и Ю. П. Рыбоваловым.)

Влияние динамической деформации на структуру монокристаллов ванадия // Физика металлов и металловедение.— 1975.— Т. 39, № 3.— С. 559—563. (Совм. с В. Г. Лютцау, Е. П. Костиковой, И. В. Костиной и А. Ф. Мельшановым.)

Локальная деформация углеграфитовых материалов в процессе высокотемпературного растяжения // Докл. АН СССР.— 1975.— Т. 224, № 5.— С. 1063—1065. (Совм. с В. Н. Барабановым, Г. М. Волковым и Л. И. Кнорозом.)

Метод расчета конструкций на сопротивление хрупкому разрушению // Проблемы разрушения металлов. Материалы семинара.— М.: Знание, 1975.— С. 7—18. (Совм. с Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелевым, Г. Н. Мариновым и Ю. П. Рыбоваловым.)

Наследственные эффекты при деформировании металлов // Успехи механики деформируемых сред.— М.: Наука, 1975.— С. 470—477. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Некоторые современные идеи механики разрушения и курс сопротивления материалов // Сопротивление материалов, строительная механика и теория упругости: Сб. научн.-метод. статей. Вып. 2.— М.: Высшая школа, 1975.— С. 3—12.

Оценка прочности дисков и роторов турбин и генераторов // Изв. вузов. Машиностроение.— 1976.— № 1.— С. 5—9. (Совм. с А. И. Федосовым, В. П. Рабиновичем и А. А. Гензе.)

Поливолокнистые композиционные материалы // Пластмассы.— 1976.— № 3.— С. 31—33. (Совм. с Г. М. Гуняевым, А. Ф. Румянцевым, Е. И. Степанычевым, И. М. Махмутовым и Н. Н. Федьковой.)

Разрушение около боковых выточек композитов с низкой сдвиговой прочностью // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 6.— С. 112—119. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Временные эффекты при упругом и пластическом деформировании // Аппот. докл. IV Всес. съезде по теор. и прикл. механике.— Киев: Наукова думка, 1976.— С. 105—106.

Кинетическая модель распространения трещины в полимерных материалах // Там же, 1976.— С. 94. (Совм. с А. И. Зобниным.)

Критерий прочности для армированных волокнами пластиков // Там же, 1976.— С. 104. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Метод расчета конструкций на сопротивление хрупкому разрушению // Машиноведение.— 1976.— № 1.— С. 62—68. (Совм. с Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелевым, Г. Н. Мериновым и Ю. П. Рыбоваловым.)

Механические свойства композита с карбонизированной матрицей // Механика полимеров.— 1976.— № 2.— С. 235—240. (Совм. с С. А. Колесниковым, В. С. Матицыным, И. М. Махмутовым, В. А. Руденко и Е. И. Степанычевым.)

Нелинейные зависимости напряжение — деформация для углепластиков при непрерывном статическом нагружении // Механика полимеров.— 1975.— № 1.— С. 49—53. (Совм. с Г. М. Гуняевым, М. А. Кузнецовой, И. М. Махмутовым и Е. И. Степанычевым.)

Fracture mechanics of aligned fibrous composites // Proc. Intern. Conf. Fracture Mech. and Technol. V. 1. Aphen aan den Rijn.— 1977.— P. 321—345. (Совм. с Г. П. Черепановым.)

Исследование физико-механических свойств углеродных волокон при повышенных температурах // Механика полимеров.— 1977.— № 4.— С. 626—630. (Совм. с Г. Е. Мостовым, Н. Н. Дергуновым и Ю. П. Ануфриевым.)

К оценке прочности деталей с дефектами // Всесоюзный симпозиум «Прикладные вопросы механики разрушения в машиностроении». Тез. докл.— М.: НТО Машпром, 1977.— С. 75—79. (Совм. с А. Н. Федосовым, В. П. Рабиновичем и Е. М. Канащенко.)

Механические свойства материалов // Телевизионный курс сопротивления материалов. Растяжение и кручение.— М.: Высшая школа, 1977.— С. 44—58.

Некоторые задачи механики деформируемого твердого тела, связанные с проблемой разрушения // Нерешенные задачи механики и прикладной математики.— М.: Изд-во МГУ, 1977.— С. 122—124.

Развитие исследований по механике деформирования и разрушения // Машиноведение.— 1977.— № 5.— С. 66—85. (Совм. с Н. А. Махутовым, С. В. Серенсенем и Н. И. Пригоровским.)

Физические основы сопротивления материалов // Телевизионный курс сопротивления материалов. Растяжение и кручение.— М.: Высшая школа, 1977.— С. 58—74.

Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука, 1977.— 384 с.

Strength criteria for fibre-reinforced plastics // Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Internat. Conf. Fract. V. 3B.— N. Y.: Pergamon press, 1978.— P. 1059—1063. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Brittle fracture design of structures // Adv. Res. Strength and Fract. Mater. 4th Internat. Conf. Fract. V. 3B.— N. Y.: Pergamon Press.— 1978.— P. 765—772. (Совм. с Г. С. Васильченко, П. Ф. Кошелевым и Г. Н. Мериновым.)

On nonlinear effects on fracture mechanics // 7th Congr. Mater. Test. Lectures. V. 1.— Bp.: Akad. kiado.— 1978.— P. 265—269. (Совм. с П. Ф. Кошелевым.)

Some aspects of fracture mechanics in the USSR // Fracture Mechanics. 10th Symposium in Naval Structure Mechanics.— Washington: Univ. press Virginia, 1978.— P. 173—190.

The nonlinear hereditary-type stress-strain relation for metals // Internat. J. Solids Structures.— 1978.— V. 14, No. 2.— P. 173—185. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Проблемы прочности изделий машиностроения и стандартизации // Стандарты и качество.— 1978.— № 5.— С. 19—23. (Совм. с К. В. Фроловым, В. П. Когаевым, Н. А. Махутовым, А. П. Гусенковым, В. А. Грешниковым, Б. Н. Волковым, Е. И. Тавером и Г. П. Мельниковым.)

О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред // Изв. АН СССР. МТТ.— 1978.— № 4.— С. 120—128. (Совм. с В. Д. Кулиевым и Г. П. Черепановым.)

Соотношения теории упругости для изотропного равномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ.— 1978.— № 6.— С. 29—34. (Совм. с Е. В. Ломакиным.)

О прочности композитов, армированных в двух направлениях // Механика полимеров.— 1978.— № 5.— С. 832—834.

Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе // Механика полимеров.— 1978.— № 2.— С. 219—225. (Совм. с И. Н. Даниловой, А. Н. Полиловым, Т. В. Соколовой, И. С. Копейкиным и М. В. Вайнбергом.)

Исследование длительной прочности углеграфитовых композиционных материалов при различных температурах // Механика полимеров.— 1978.— № 1. С. 45—50. (Совм. с Е. И. Степанычевым, В. С. Килюным, С. А. Колесниковым, В. С. Матыциным, И. М. Махмутовым и В. И. Резановым.)

Кинетическая модель распространения трещины в полимерных материалах // Прикл. механика.— 1978.— Т. 14, № 2.— С. 18—23. (Совм. с А. И. Зобниным.)

Временные эффекты при упругом и пластическом деформировании // Современные проблемы теор. и прикл. механики: Тр. IV Всес. съезда по теор. и прикл. механике.— Киев: Наукова думка.— 1978.— С. 307—318.

Механика композитов // Вестн. АН СССР.— 1979.— № 5.— С. 50—58.

О международной конференции «Допускаемые дефекты в оборудовании, работающем под давлением» // Проблемы прочности.— 1979.— № 9.— С. 118—122. (Совм. с П. Ф. Кошелевым.)

Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.— 744 с.

Прочность слоистых композитов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 1.— С. 113—119.

Strength criteria for fiber-reinforced plastics // Композиционные материалы. Докл. I советско-японского симпозиума.— М.: Изд-во МГУ, 1979.— С. 375—384. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Elements of hereditary solid mechanics.— Moscow: Mir.— 1980.— 387 p.

Механика волокнистых композитов // Успехи механики.— 1980.— Т. 3, № 1.— С. 3—55. (Совм. с С. Т. Милейко.)

Деформационные и прочностные свойства косоугольно армированных углепластиков при различных режимах нагружения // Механика композитных материалов.— 1980.— № 6.— С. 1000—1009. (Совм. с А. В. Березинным, И. Б. Гинко, А. Ф. Мельшановым, А. А. Радченко, И. М. Махмутовым и Л. И. Поляковым.)

Релаксация напряжений в углеродном волокне при повышенных температурах // Механика композитных материалов.— 1980.— № 1.— С. 3—9. (Совм. с Г. Е. Мостовым, Л. П. Кобецом и В. И. Фроловым.)

Длительное разрушение неупругих материалов // Аннот. докл. V Всес. съезда по теор. и прикл. механике. — Алма-Ата: Наука, 1981. — С. 299. (Совм. с Ю. В. Суворовой.)

Применение углепластиков в конструкции летательных аппаратов // Механика композитных материалов. — 1981. — № 4. — С. 657—667. (Совм. с А. А. Туполевым, В. Ф. Кутыиновым, В. П. Когаевым, А. В. Березиным и В. В. Сулименковым.)

О волновой динамике нелинейно-наследственных сред и модели Рахматулина // Механика твердого деформируемого тела и расчет конструкций. — Ташкент: Фан, 1981. — С. 110—116. (Совм. с Ю. В. Суворовой и А. Е. Осокиным.)

Условия пластичности // Телевизионный курс сопротивления материалов. Напряженное состояние и устойчивость. — М.: Высшая школа, 1981. — С. 50—63.

Научные основы и направления унификации и стандартизации методов расчетов и испытаний на прочность // Унификация и стандартизация методов расчетов и испытаний на прочность. — М.: Стандарты, 1982. — С. 5—12. (Совм. с К. В. Фроловым, В. П. Когаевым, А. П. Гусенковым, Н. А. Махутовым, В. Ф. Курочкиным и Е. И. Тавером.)

Критерий межслойной прочности углепластиков при циклических нагрузках. — Механика композитных материалов. — 1982. — № 6. — С. 983—986. (Совм. с В. П. Когаевым, А. Н. Полиловым и В. Б. Стрелковым.)

Waves of deformation in nonlinear hereditary medium // Nonlinear Deformation Waves. IUTAM Symposium. Abstracts. — Tallin: Изд-во АН ЭССР, 1982. — С. 14. (Совм. с Ю. В. Суворовой и А. Е. Осокиным.)

О разрушении композитных труб по форме «китайского фонарика» // Механика композитных материалов. — 1983. — № 3. — С. 548—550. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Deformation waves in nonlinear hereditary media // Nonlinear Deformation Waves. IUTAM Symposium. — Berlin — Heidelberg: Springer, 1983. — P. 157—170. (Совм. с Ю. В. Суворовой и А. Е. Осокиным.)

Развитие расслоений при сжатии композитов // Изв. АН СССР. МТТ. — 1983. — № 4. — С. 166—171. (Совм. с А. Н. Полиловым.)

Основные показатели, расчетные характеристики и материалоемкость элементов машиностроительных конструкций из композитных материалов // Информационные материалы сессии Ученого Совета по результатам законченных в 1983 году научно-исследовательских работ. — М.: Изд. АН СССР, Ин-т Машиноведения им. А. А. Благонравова, 1984. — С. 91—96.

Циклическая прочность однонаправленных углепластиков при растяжении под углом к направлению армирования // Механика композитных материалов. — 1985. — № 2. — С. 242—246. (Совм. с Когаевым В. П. и др.)

О законе пластичности для композитной среды // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 1. — С. 121—127. (Совм. с Л. П. Исуповым.)

Модель деформируемого тела с реакцией и приложение ее к физическим задачам биомеханики // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 6. — С. 96—100. (Совм. с М. Б. Ахундовым и Ю. В. Суворовой.)